

III.3.3 Axes d'une rotation.

Théorème. Si $R \in O_3(\mathbb{R})$, alors il existe $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $Rv = \pm v$.

Démo. (Euler) Si ${}^tR \neq R$, soit $0 \neq v \in \ker {}^tR - R$.

Si ${}^tR = R$, alors $R^2 = I_3 \Rightarrow \mathbb{R}^3 = \ker(R - I_3) \oplus \ker(R + I_3)$.

Corollaire. Soit $R \in SO_3(\mathbb{R})$, alors si ${}^tR \neq R$, l'axe de la rotation R est

$$\ker R - I_3 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} R_{23} - R_{32} \\ R_{31} - R_{13} \\ R_{12} - R_{21} \end{pmatrix}.$$

Exercice. $\forall R \in SO_3(\mathbb{R}), \exists P \in SO_3(\mathbb{R}), R = {}^tPR_{1,\theta}P$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$.

III.3.4 Angles d'Euler

Exercice. Les matrices de $SO_3(\mathbb{R})$ sont de la forme

$$R_{1,\alpha}R_{3,\beta}R_{1,\gamma}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}.$$

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Indication. Soit $R \in SO_3(\mathbb{R})$. il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $R(\vec{e}_1) = R_{1,\alpha}R_{2,\beta}(\vec{e}_1)$.

Alors $\exists \gamma, (R_{1,\alpha}R_{2,\beta})^{-1}R = R_{1,\gamma}$.

III.4 Les réflexions orthogonales engendrent $O_n(\mathbb{R})$

Proposition. Soit $O \in O_n(\mathbb{R})$. Soit $k = \text{rang}(O - I_n)$. Alors il existe des réflexions orthogonales $r_1, \dots, r_k$ telles que $O = r_1 \dots r_k$.

Lemme. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \ker {}^t A = (\text{Im } A)^\perp$.

Démo. par récurrence sur $k \geq 0$.

Exercices.

- 1) Si $R = r_1 \dots r_k$ où $r_1, \dots, r_k$ sont des réflexions orthogonales, alors $k \geq \text{rang}(R - I_n)$. *Indication.* $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall r$ réflexion orthogonale, $\text{rang}(rA - I_n) \geq \text{rang}(A - I_n) - 1$.

- 2) Soit $O = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in O_4(\mathbb{R})$. Alors $\text{rang } O - I_4 = 3$ et

$$O = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{3 \text{ réflexions orthogonales}}.$$

- 3) Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Alors $I_n + A$ est inversible et $(I_n - A)(I_n + A)^{-1} \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$.

IV Réduction des endomorphismes adjoints

IV.1 Matrices symétriques

IV.1.1 Réduction

Théorème. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $A = PD^t P$.

Lemme. A possède une valeur propre réelle.

Démo. Par récurrence sur $n \geq 0$.

Exemples.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = PD^t P$ où $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$

b) Soit $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors $C = PD^tP$ où $P = \left(\sin \frac{ij\pi}{n+1}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$

et $D = \begin{pmatrix} 2 - 2 \cos \frac{\pi}{n+1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & & 2 - 2 \cos \frac{n\pi}{n+1} \end{pmatrix}$.

Exercices.

1. Si $\lambda \neq \mu$, alors $\ker(A - \lambda) \perp \ker(A - \mu)$.
2. Montrer que la matrice symétrique $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

IV.1.2 Signature.

Définition. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A . On note $\text{sign}(A) = (p, q)$ la signature de A où

$$p = |\{1 \leq i \leq n : \lambda_i > 0\}|$$

$$q = |\{1 \leq i \leq n : \lambda_i < 0\}|;$$

c'est la *signature* de A .

Exercices.

- 1) $p + q = \text{rang}(A)$.
- 2) $\text{sign} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (2, 0)$, $\text{sign} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1, 0)$, $\text{sign} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1, 1)$.

IV.1.3 Min-max.

Théorème. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soient $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A .

Alors

$$\lambda_k = \min_{\substack{F \leq \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \\ \dim F = k}} \max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} {}^t x A x = \max_{\substack{F \leq \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \\ \dim F = n-k+1}} \min_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} {}^t x A x .$$

Exercices.

- 1) Avec les notations du théorème, vérifier que si $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors $\lambda_1(A) + \lambda_1(B) \leq \lambda_1(A + B) \leq \lambda_n(A + B) \leq \lambda_n(A) + \lambda_n(B)$.
- 2) Démontrer le *critère de Sylvester avec les mineurs principaux* à l'aide du théorème ci-dessus.

IV.2 Adjoint d'un endomorphisme

Théorème de Riesz. Soit E un espace euclidien. $\forall \lambda \in E^*, \exists x_\lambda \in E, \lambda = \langle x_\lambda, \cdot \rangle$.

Définition. Soit E un espace euclidien. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on pose $f^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x, y \in E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle .$$

Exercice. Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E , alors $[f^*]_{\mathcal{B}} = {}^t[f]_{\mathcal{B}}$.