

III.3 Dimension 3

III.3.1 Produit vectoriel

Définitions. (*Produit vectoriel et produit mixte*)

- 1) $\forall x, y, z, x', y', z' \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$
- 2) $\forall x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'' \in \mathbb{R}, \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \right] := \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} \in \mathbb{R}.$

Propriétés.

- i) $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto u \wedge v$ est bilinéaire alternée.
- ii) $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3, [u, v, w] = (u \wedge v) \cdot w^\dagger$
- iii) $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3, u \wedge (v \wedge w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w.$
- iv) $\forall u, v \in \mathbb{R}^3, \|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 \sin^2 \alpha$ où $\alpha \in [0, \pi], (u \cdot v) = \|u\| \|v\| \cos \alpha.$
- v) (Jacobi) $\forall u, v, w, u \wedge (v \wedge w) + v \wedge (w \wedge u) + w \wedge (u \wedge v) = 0.$

Remarque. $\vec{x} \wedge \vec{y} \perp \vec{x}, \vec{y}.$

III.3.2 Formule de Rodrigues

Si $\vec{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on pose $\Lambda_{\vec{x}} := \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})^\dagger$. Soit

$\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ un vecteur de norme 1.

- La matrice de la rotation d'axe $\vec{k}$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ est $R_{\vec{k}, \theta} = I_3 + \sin \theta \Lambda_{\vec{k}} + (1 - \cos \theta) \Lambda_{\vec{k}}^2$.
- Comme application linéaire, on a :

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3, R_{\vec{k}, \theta}(\vec{v}) = \cos \theta \vec{v} + \sin \theta \vec{k} \wedge \vec{v} + (1 - \cos \theta)(\vec{k} \cdot \vec{v}) \vec{k}.$$

$$\text{Exemples. } R_{\vec{e}_1, \theta} = R_{1, \theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, R_{\vec{e}_3, \theta} = R_{3, \theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice. $R = \exp(\theta \Lambda_{\vec{k}}).$

[†]. Pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$.

[‡]. C'est la matrice de $\vec{v} \mapsto \vec{x} \wedge \vec{v}$.

III.3.3 Axes d'une rotation.

Théorème. Si $R \in O_3(\mathbb{R})$, alors il existe $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $Rv = \pm v$.

Démo. (Euler) Si ${}^tR \neq R$, soit $0 \neq v \in \ker {}^tR - R$.

Si ${}^tR = R$, alors $R^2 = I_3 \Rightarrow \mathbb{R}^3 = \ker(R - I_3) \oplus \ker(R + I_3)$.

Corollaire. Soit $R \in SO_3(\mathbb{R})$, alors si ${}^tR \neq R$, l'axe de la rotation R est

$$\ker R - I_3 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} R_{23} - R_{32} \\ R_{31} - R_{13} \\ R_{12} - R_{21} \end{pmatrix}.$$

Exercice. $\forall R \in SO_3(\mathbb{R}), \exists P \in SO_3(\mathbb{R}), R = {}^tPR_{1,\theta}P$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$.

III.3.4 Angles d'Euler

Exercice. Les matrices de $SO_3(\mathbb{R})$ sont de la forme

$$R_{1,\alpha}R_{3,\beta}R_{1,\gamma}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}.$$

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Indication. Soit $R \in SO_3(\mathbb{R})$. il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $R(\vec{e}_1) = R_{1,\alpha}R_{2,\beta}(\vec{e}_1)$.

Alors $\exists \gamma, (R_{1,\alpha}R_{2,\beta})^{-1}R = R_{1,\gamma}$.

III.4 Les réflexions orthogonales engendrent $O_n(\mathbb{R})$

Proposition. Soit $R \in O_n(\mathbb{R})$. Soit $k = \text{rang}(R - I_n)$. Alors il existe des réflexions orthogonales $r_1, \dots, r_k$ telles que $R = r_1 \dots r_k$.

Démo. par récurrence sur $k \geq 0$.

Exercices.

- 1) Si $R = r_1 \dots r_k$ où $r_1, \dots, r_k$ sont des réflexions orthogonales, alors $k \geq \text{rang}(R - I_n)$. *Indication.* $\ker R - I_n \leq H_1 \cap \dots \cap H_k$ où $H_i = \ker r_i - I_n$.
- 2) Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Alors $I_n + A$ est inversible et $(I_n - A)(I_n + A)^{-1} \in SO_n(\mathbb{R})$.