

Proposition. (Matrice d’une projection orthogonale.) Soit p_F la projection orthogonale sur F . Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E , alors

$$[p_F]_{\mathcal{B}} = B({}^t B B)^{-1} {}^t B$$

où $B = (\langle e_i, f_j \rangle)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k}} \in \mathcal{M}_{nk}$ est la matrice d’une base $(f_1, \dots, f_k)$ quelconque de F dans la base $\mathcal{B}$.

Exemple. Si $E = \mathbb{R}^n$, si d est une droite, alors $p_d = \frac{v {}^t v}{v {}^t v}$ où $v \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ est le vecteur des coordonnées d’un vecteur directeur de d .

III Matrices orthogonales

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Définition. Sont équivalentes.

- i) $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$.
- ii) f envoie toute base orthonormale sur une base orthonormale.
- iii) f envoie une base orthonormale sur une base orthonormale.

On dit que f est une *transformation orthogonale* si une de ces assertions est vraie.

Notation. $O(E)$ = l’ensemble des transformations orthogonales de E .

Exercices.

- 1) $O(E) \leq \text{GL}(E)$ est un sous-groupe.
- 2) Si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $f \in O(E) \Leftrightarrow [f]_{\mathcal{B}} \in O_n(\mathbb{R})$ pour toute base orthonormale $\mathcal{B}$ de E .

Définition. Soit $M \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Sont équivalentes

- i) ${}^t M M = I_n$.
- ii) $M {}^t M = I_n$.
- iii) M inversible et $M^{-1} = {}^t M$.

Si une de ces conditions est vérifiée, on dit que la matrice M est *orthogonale*.

Remarques. i) $\Leftrightarrow$ « les colonnes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ »

ii) $\Leftrightarrow$ « les lignes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ »

Une *matrice de rotation* est une matrice orthogonale de déterminant 1.

Notations. $O_n(\mathbb{R})$, $\text{SO}_n(\mathbb{R})$.

Exercices.

- 1) $\forall M = {}^tM \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), (I - M)(I + M)^{-1} \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$.
- 2) $\text{SO}_n(\mathbb{R}) \leq O_n(\mathbb{R}) \leq \text{GL}_n(\mathbb{R})$.
- 3) Si $M \in O_n(\mathbb{R})$, $\det M = \pm 1$.

Exemples. Les matrices de permutations, $I_n - 2v^t v$ pour tout vecteur colonne v

de norme 1 pour le produit scalaire usuel, $-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \phi & \frac{1}{\phi} \\ -\phi & \frac{1}{\phi} & 1 \\ \frac{1}{\phi} & -1 & \phi \end{pmatrix}$

où $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

III.1 Symétries orthogonales

Définition. Soit $F \leq E$. La *symétrie orthogonale* par rapport à F est l'application linéaire $s_F : E \rightarrow E$, $\forall x \in F, \forall y \in F^\perp, x + y \mapsto x - y$.

Si F est de codimension 1, on dit que c'est une *réflexion orthogonale*. C'-à-d : $\forall x \in F, s_F(x) = x, \forall y \in F^\perp, s_F(y) = -y$.

Exercices.

- 1) Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. Alors s est une symétrie orthogonale $\Leftrightarrow s = \text{Id}_E$ et $\ker(s - 1) \perp \ker(s + 1)$.
- 2) Soit $F \leq E$. On a $s_F = 2p_F - \text{Id}_E = \text{Id}_E - 2p_{F^\perp}$.
- 3) Soit $v \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne de norme 1 (pour le produit scalaire usuel). Montrer que $I_n - 2v^t v$ est une réflexion orthogonale. Par rapport à quel sous-espace ?
- 4) Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que S est une matrice de symétrie orthogonale (pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$) $\Leftrightarrow S^2 = I_n$ et ${}^t S = S$.

Proposition. Une matrice de symétrie orthogonale est orthogonale. De plus, les réflexions orthogonales engendrent $O_n(\mathbb{R})$.

III.2 Dimension 2

Proposition. $\text{SO}_2(\mathbb{R}) = \{R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\}, O_2(\mathbb{R}) \setminus \text{SO}_2(\mathbb{R}) =$

$$\{S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Remarques. R_α est la rotation d'angle α , S_α est la symétrie orthogonale par rapport à la droite « qui fait un angle $\frac{\alpha}{2}$ avec l'axe des abscisses ».

Exercices.

1) $R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta}$, $S_\alpha S_\beta = R_{2(\alpha-\beta)}$, $S_\alpha R_\beta = S_{\alpha-\beta}$, $R_\alpha S_\beta = S_{\alpha+\beta}$.

2) $R_\alpha = \exp \alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$