

II.3 Sous-espaces orthogonaux

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Notation. Soit $X \subseteq E$. On pose $X^\perp = \{y \in E : \forall x \in X, \langle x, y \rangle = 0\}$.

C'est l'orthogonal de X .

Proposition

- i) $X^\perp = \text{Vect}(X)^\perp$ est un sous-espace de E ;
- ii) $0^\perp = E, E^\perp = 0$,
- iii) $\forall F \leq E, F \leq F^{\perp\perp}, F^\perp = F^{\perp\perp\perp}, F + F^\perp = F \oplus F^\perp$,
- iv) $\forall F, G \leq E, (F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp, F^\perp + G^\perp \leq (F \cap G)^\perp$.
- v) si F est de dimension finie, alors $E = F \oplus F^\perp$ et si E est de dimension finie, alors $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$;
- vi) Si E est de dimension finie, alors $\forall F \leq E, F = F^{\perp\perp}, \forall F, G \leq E, F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

II.4 Projections orthogonales

Soit $E, \langle \cdot, \cdot \rangle$ un espace euclidien.

II.4.1 Définition

Soit $F \leq E$. Soit $x \in E$. Soient $x_1 \in F, x_2 \in F^\perp$ tels que $x = x_1 + x_2$. On pose $p_F(x) = x_1$. C'est la *projection orthogonale de x sur F* .

Remarque. Soient $x, y \in E$. Alors $y = p_F(x) \Leftrightarrow y \in F$ et $x - y \in F^\perp$.

Exercice. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors p est une projection orthogonale $\Leftrightarrow p^2 = p$ et $\ker p \perp \text{Im } p$.

II.4.2 Formule

Si f_1, \dots, f_k est une base orthonormale de F , alors $p_F(x) = \langle x, f_1 \rangle f_1 + \dots + \langle x, f_k \rangle f_k$.

II.4.3 Distance à un sous-espace

Soit $x \in E$, alors $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\| = \|x - p_F(x)\|$.

II.5 Matrices de Gram

Définition. Soient $e_1, \dots, e_n \in E$. On note $G(e_1, \dots, e_n) = (\langle e_i, e_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition.

- La matrice $G(e_1, \dots, e_n)$ est symétrique positive.
- La matrice $G(e_1, \dots, e_n)$ est inversible \Leftrightarrow symétrique définie positive $\Leftrightarrow e_1, \dots, e_n$ sont \mathbb{R} –linéairement indépendants.
- Pour tout $x \in E$, $d(x, F) = \sqrt{\frac{\det G(x, f_1, \dots, f_n)}{\det G(f_1, \dots, f_n)}}$ pour toute base quelconque (f_1, \dots, f_n) de F .

Exercices.

1. Calculer $\inf_{a, b, c \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 dx$.
2. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$, on pose $P(a_1, \dots, a_n) = \{t_1 a_1 + \dots + t_n a_n : 0 \leq t_1, \dots, t_n \leq 1\}$. Vérifier par récurrence sur n que

$$\text{vol}(P(a_1, \dots, a_n)) = \int_{x \in P(a_1, \dots, a_n)} dx_1 \dots dx_n = \sqrt{\det G(a_1, \dots, a_n)} .$$

Exercice. Soit E un espace euclidien avec une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ de matrice P dans la base \mathcal{B} . Vérifier que p est une projection orthogonale $\Leftrightarrow P^2 = P$ et ${}^t P = P$.

II.6 Angles entre vecteurs de \mathbb{R}^n .

Définition. Soient $0 \neq x, y \in \mathbb{R}^n$. L'angle entre x, y est le réel $0 \leq \widehat{xy} \leq \pi$ tel que

$$\cos \widehat{xy} = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} .$$

Exemple. $x \perp y \Leftrightarrow \widehat{xy} = \frac{\pi}{2}$; x, y colinéaires $\Leftrightarrow \widehat{xy} = \pm \pi$.

Exercice. Soit un tétraèdre régulier dans \mathbb{R}^3 . L'angle entre les vecteurs issus du centre et pointés vers les sommets est $-\text{Arccos} \frac{1}{3} = \pi - \text{Arctan}(2\sqrt{2})$.

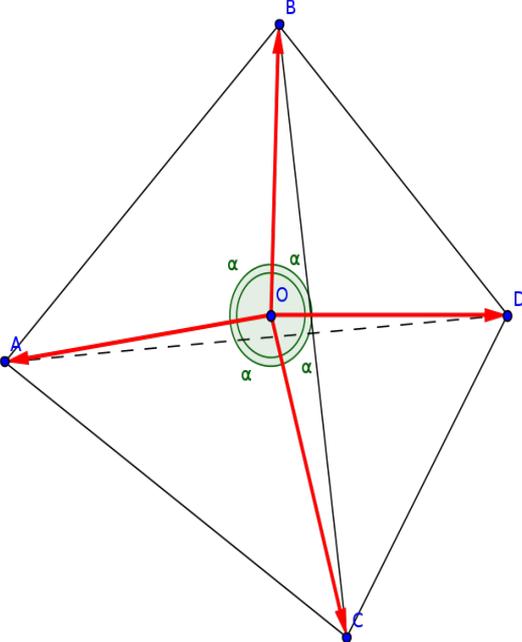


FIGURE 1 – $\alpha = -\text{Arccos}\frac{1}{3}$