II.3 Sous-espaces orthogonaux

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien.

Notation. Soit $X \subseteq E$. On pose $X^\perp = \{y \in E \;:\; \forall\, x \in X,\, \langle x, y\rangle = 0\}$.
C'est *l'orthogonal* de X.

Proposition

i) $X^\perp = \mathrm{Vect}(X)^\perp$ est un sous-espace de E ;

ii) $0^\perp = E$, $E^\perp = 0$,

iii) $\forall\, F \leqslant E$, $F \leqslant F^{\perp\perp}$, $F^\perp = F^{\perp\perp\perp}$, $F + F^\perp = F \oplus F^\perp$,

iv) $\forall\, F, G \leqslant E$, $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$, $F^\perp + G^\perp \leqslant (F \cap G)^\perp$.

v) si F est de dimension finie, alors $E = F \oplus F^\perp$ et si E est de dimension finie, alors $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$;

vi) Si E est de dimension finie, alors $\forall\, F \leqslant E$, $F = F^{\perp\perp}$, $\forall\, F, G \leqslant E$, $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

II.4 Projections orthogonales

Soit $E, \langle\cdot,\cdot\rangle$ un espace euclidien.

II.4.1 Définition

Soit $F \leqslant E$. Soit $x \in E$. Soient $x_1 \in F$, $x_2 \in F^\perp$ tels que $x = x_1 + x_2$. On pose $p_F(x) = x_1$. C'est la *projection orthogonale de x sur F*.

Remarque. Soient $x, y \in E$. Alors $y = p_F(x) \Leftrightarrow y \in F$ et $x - y \in F^\perp$.

Exercice. Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. Alors p est une projection orthogonale $\Leftrightarrow$ $p^2 = p$ et $\ker p \perp \mathrm{im}\, p$.

II.4.2 Formule

Si $f_1, ..., f_k$ est une base orthonormale de F, alors $p_F(x) = \langle x, f_1\rangle f_1 + ... + \langle x, f_k\rangle f_k$.

II.4.3 Distance à un sous-espace

Soit $x \in E$, alors $d(x, F) = \inf_{y \in F} ||x - y|| = ||x - p_F(x)||$.

II.5 Matrices de Gram

Définition. Soient $e_1, ..., e_n \in E$. On note $G(e_1, ..., e_n) = (\langle e_i, e_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition.

— La matrice $G(e_1, ..., e_n)$ est symétrique positive.

— La matrice $G(e_1, ..., e_n)$ est inversible $\Leftrightarrow$ symétrique définie positive $\Leftrightarrow$ $e_1, ..., e_n$ sont $\mathbb{R}-$linéairement indépendants.

— Pour tout $x \in E$, $d(x, F) = \sqrt{\frac{\text{dét}G(x, f_1, ..., f_n)}{\text{dét}G(f_1, ..., f_n)}}$ pour toute base quelconque $(f_1, ..., f_n)$ de F.

Exercices.

1. Calculer $\inf_{a,b,c \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 dx$.
2. Soient $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}^n$, on pose $P(a_1, ..., a_n) = \{t_1 a_1 + ... + t_n a_n \ : \ 0 \leqslant t_1, ..., t_n \leqslant 1\}$. Vérifier par récurrence sur n que
$$\text{vol}(P(a_1, ..., a_n)) = \int_{x \in P(a_1, ..., a_n)} dx_1 ... dx_n = \sqrt{\text{dét}G(a_1, ..., a_n)} \ .$$

Proposition. (**Matrice d'une projection orthogonale.**) Soit p_F la projection orthogonale sur F. Si $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormale de E, alors
$$[p_F]_{\mathscr{B}} = B({}^t BB)^{-1t}B$$
où $B = (\langle e_i, f_j \rangle)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant k}} \in \mathscr{M}_{nk}$ est la matrice d'une base $(f_1, ..., f_k)$ quelconque de F dans la base $\mathscr{B}$.

Exemple. Si $E = \mathbb{R}^n$, si d est une droite, alors $p_d = \frac{v{}^t v}{{}^t vv}$ où $v \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$ est le vecteur des coordonnées d'un vecteur directeur de d.

Exercice. Soit E un espace euclidien avec une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$. Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ de matrice P dans la base $\mathcal{B}$. Vérifier que p est une projection orthogonale $\Leftrightarrow$ $P^2 = P$ et ${}^t P = P$.

II.6 Symétries orthogonales

Définition. Soit $F \leqslant E$. La *symétrie orthogonale* par rapport à F est l'application linéaire $s_F : E \to E$, $\forall \, x \in F$, $\forall \, y \in F^\perp$, $x + y \mapsto x - y$.

Si F est de codimension 1, on dit que c'est une *réflexion orthogonale*. C'-à-d : $\forall \, x \in F$, $s_F(x) = x$, $\forall \, y \in F^\perp$, $s_F(y) = -y$.

Exercices.

1) Soit $s \in \mathscr{L}(E)$. Alors s est une symétrie orthogonale $\Leftrightarrow$ $s = \mathrm{Id}_E$ et $\ker(s-1)\perp\ker(s+1)$.
2) Soit $F \leqslant E$. On a $s_F = 2p_F - \mathrm{Id}_E$.
3) Soit $v \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne de norme 1 (pour le produit scalaire usuel. Montrer que $I_n - 2v^tv$ est une symétrie orthogonale. *Par rapport à quel sous-espace ?*
4) Soit $S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que S est une matrice de symétrie orthogonale (pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$) $\Leftrightarrow$ $S^2 = I_n$ et ${}^tS = S$.

III Angles entre vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Définition. Soient $0 \neq x, y \in \mathbb{R}^n$. L'angle entre x, y est le réel $0 \leqslant \widehat{xy} \leqslant \pi$ tel que

$$\cos\widehat{xy} = \frac{\langle x, y\rangle}{||x||||y||} \ .$$

Exemple. $x\perp y \Leftrightarrow \widehat{xy} = \frac{\pi}{2}$; x, y *colinéaires* $\Leftrightarrow \widehat{xy} = \pm\pi$.

Exercice. Soit un tétraèdre régulier dans $\mathbb{R}^3$. L'angle entre les vecteurs issus du centre et pointés vers les sommets est $-\mathrm{Arccos}\frac{1}{3} = -\mathrm{Arctan}(2\sqrt{2})$.