II.1 Bases orthogonales

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Définitions.

a) On dit que $x, y \in E$ sont *orthogonaux* si $\langle x, y \rangle = 0$.

b) Une base *orthogonale* de E est une base $(e_1, ..., e_n)$ telle que $\forall i \neq j$, $\langle e_i, e_j \rangle = 0$.

c) Une base *orthonormale ou orthonormée* de E est une base $(e_1, ..., e_n)$ telle que $\forall\, i \neq j$, $\langle e_i, e_j \rangle = 0$, $\forall\, i$, $\langle e_i, e_i \rangle = 1$.

Théorème. Si E est un espace euclidien, alors E admet une base orthogonale. En particulier E admet une base orthonormale.

Exercices.

1) *(Théorème de Pythagore)* Soient $x, y \in E$. Montrer que $\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow ||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.

2) Soit $(e_1, ..., e_n)$ une famille de vecteurs de E telle que $\forall\, i \neq j$, $\langle e_i, e_j \rangle = 0$. Vérifier que les e_i sont linéairement indépendants.

3) Trouver une base orthonormale pour $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y + z = 0\}$ avec le produit scalaire usuel.

II.2 Procédé de Gram-Schmidt

Théorème. Soit E un espace euclidien de base $(e_1, ..., e_n)$. Il existe une unique base $(f_1, ..., f_n)$ de E telle que

(i) $\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n$, $f_i = e_i \bmod \langle e_1, ..., e_{i-1} \rangle$;

(ii) la base $(f_1, ..., f_n)$ est orthogonale.

Démo. On définit par récurrence :

$$f_1 = e_1,\ \forall\, i > 1,\ f_i = e_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle e_i, f_k \rangle}{\langle f_k, f_k \rangle} f_k \ .$$

Remarques. En particulier, la base $(\frac{f_1}{||f_1||}, ..., \frac{f_n}{||f_n||})$ est orthonormale.

Exercices.

a) Si $e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormale de E, alors $\forall\, x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$, $y = y_1 e_1 + ... + y_n e_n \in E$, $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$.

b) Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la base $(e_0, e_1, e_2, e_3, e_4) = (1, X, X^2, X^3, X^4)$ de $\mathbb{R}[X]_{\leqslant 4}$ avec le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^\pi f(\cos x)g(\cos(x))dx$.

$f_0 = e_0 = 1$, $f_1 = e_1 - \frac{\langle e_1,f_0\rangle}{\langle f_0,f_0\rangle}f_0 = X - \frac{\int_0^\pi \cos x dx}{\int_0^\pi dx}1 = X$, $f_2 = e_2 - \frac{\langle e_2,f_1\rangle}{\langle f_1,f_1\rangle}f_1 - \frac{\langle e_2,f_0\rangle}{\langle f_0,f_0\rangle}f_0 = X^2 - \frac{\int_0^\pi \cos^3 x dx}{\int_0^\pi \cos^2 x dx}X - \frac{\int_0^\pi \cos^2 x dx}{\int_0^\pi dx}1 = X^2 - \frac{1}{2}$, $f_3 = e_3 - \frac{\langle e_3,f_2\rangle}{\langle f_2,f_2\rangle}f_2 - \frac{\langle e_3,f_1\rangle}{\langle f_1,f_1\rangle}f_1 - \frac{\langle e_3,f_0\rangle}{\langle f_0,f_0\rangle}f_0 = X^3 - \frac{\int_0^\pi \cos^3 x(\cos^2 x - \frac{1}{2})dx}{\int_0^\pi (\cos^2 x - \frac{1}{2})^2 dx}(X^2 - \frac{1}{2}) - \frac{\int_0^\pi \cos^4 x dx}{\int_0^\pi \cos^2 x dx}X - \frac{\int_0^\pi \cos^3 x dx}{\int_0^\pi dx}1 = X^3 - \frac{3}{4}X$, $f_4 = e_4 - \frac{\langle e_4,f_3\rangle}{\langle f_3,f_3\rangle}f_3 - \frac{\langle e_4,f_2\rangle}{\langle f_2,f_2\rangle}f_2 - \frac{\langle e_4,f_1\rangle}{\langle f_1,f_1\rangle}f_1 - \frac{\langle e_4,f_0\rangle}{\langle f_0,f_0\rangle}f_0 = X^4 - \frac{\int_0^\pi \cos^4 x(\cos^3 x - \frac{3}{4}\cos x)dx}{\int_0^\pi (\cos^3 x - \frac{3}{4}\cos x)^2 dx}(X^3 - \frac{3}{4}X) - \frac{\int_0^\pi \cos^4 x(\cos^2 x - \frac{1}{2})dx}{\int_0^\pi (\cos^2 x - \frac{1}{2})^2 dx}(X^2 - \frac{1}{2}) - \frac{\int_0^\pi \cos^5 x dx}{\int_0^\pi \cos^2 x dx}X - \frac{\int_0^\pi \cos^4 x dx}{\int_0^\pi dx}1 = X^4 - X^2 + \frac{1}{8}X$.

c) Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la forme bilinéaire symétrique associée φ_A est un produit scalaire $\Leftrightarrow \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n$, $\Delta_i(A) = \det(A_{\alpha\beta})_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant i} > 0$.

Indication. Soit $A_i = (A_{\alpha\beta})_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant i}$. *Noter* $b = (e_1, ..., e_n)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^n$. *Appliquer le procédé de Gram-Schmidt aux vecteurs* $e_1, ..., e_n$ *et obtenir une base* $b' = (f_1, ..., f_n)$ *orthogonale pour* φ_A. *Alors* $A_i = [\varphi_A]_{(e_1,...e_i)} = {}^tP_iD_iP_i$ *où* P_i *est la matrice de passage de la base* $(f_1, ..., f_i)$ *dans la base* $(e_1, ..., e_i)$ *qui est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale et* D_i *est la matrice de* φ_A *dans la base* $(f_1, ..., f_i)$ *qui est diagonale car la base* $(f_1, ...)$ *est orthogonale. Donc ,* $D_i = \mathrm{diag}(\varphi_A(f_1, f_1), ..., \varphi_A(f_i, f_i)) \Rightarrow \Delta_i(A) = (\det P_i)^2 \det D_i = \det D_i = \varphi_A(f_1, f_1)...\varphi_A(f_i, f_i)$ ... *On obtient en particulier* $\forall\, i$, $\varphi_A(f_i, f_i) = \frac{\Delta_i(A)}{\Delta_{i-1}(A)}$.

Exemple. La matrice symétrique $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ définit un produit scalaire car $\Delta_1(A) = 2$, $\Delta_2(A) = 3$, $\Delta_3(A) = 4$, $\Delta_4(A) = 5 > 0$.