

II.1 Bases orthogonales

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Définitions.

- On dit que $x, y \in E$ sont *orthogonaux* si $\langle x, y \rangle = 0$.
- Une base *orthogonale* de E est une base $(e_1, \dots, e_n)$ telle que $\forall i \neq j, \langle e_i, e_j \rangle = 0$.
- Une base *orthonormale* ou *orthonormée* de E est une base $(e_1, \dots, e_n)$ telle que $\forall i \neq j, \langle e_i, e_j \rangle = 0, \forall i, \langle e_i, e_i \rangle = 1$.

Théorème. Si E est un espace euclidien, alors E admet une base orthogonale. En particulier E admet une base orthonormale.

Exercices.

- (Théorème de Pythagore) Soient $x, y \in E$. Montrer que $\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
- Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E telle que $\forall i \neq j, \langle e_i, e_j \rangle = 0$. Vérifier que les e_i sont linéairement indépendants.
- Trouver une base orthonormale pour $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ avec le produit scalaire usuel.

II.2 Procédé de Gram-Schmidt

Théorème. Soit E un espace euclidien de base $(e_1, \dots, e_n)$. Il existe une unique base $(f_1, \dots, f_n)$ de E telle que

- $\forall 1 \leq i \leq n, f_i = e_i \bmod \langle e_1, \dots, e_{i-1} \rangle$;
- la base $(f_1, \dots, f_n)$ est orthogonale.

Démo. On définit par récurrence :

$$f_1 = e_1, \forall i > 1, f_i = e_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle e_i, f_k \rangle}{\langle f_k, f_k \rangle} f_k .$$

Remarques. En particulier, la base $(\frac{f_1}{\|f_1\|}, \dots, \frac{f_n}{\|f_n\|})$ est orthonormale.

Exercices.

- Si $e_1, \dots, e_n$ est une base orthonormale de E , alors $\forall x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \in E, \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.

- b) Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la base $(e_0, e_1, e_2, e_3, e_4) = (1, X, X^2, X^3, X^4)$ de $\mathbb{R}[X]_{\leq 4}$ avec le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^\pi f(\cos x)g(\cos(x))dx$.

$$\begin{aligned} f_0 &= e_0 = 1, f_1 = e_1 - \frac{\langle e_1, f_0 \rangle}{\langle f_0, f_0 \rangle} f_0 = X - \frac{\int_0^\pi \cos x dx}{\int_0^\pi dx} 1 = X, f_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, f_0 \rangle}{\langle f_0, f_0 \rangle} f_0 - \frac{\langle e_2, f_1 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} f_1 - \\ &= X^2 - \frac{\int_0^\pi \cos^2 x dx}{\int_0^\pi \cos^2 x dx} X - \frac{\int_0^\pi \cos^2 x dx}{\int_0^\pi dx} 1 = X^2 - \frac{1}{2}, f_3 = e_3 - \frac{\langle e_3, f_0 \rangle}{\langle f_0, f_0 \rangle} f_0 - \frac{\langle e_3, f_1 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} f_1 - \\ &= X^3 - \frac{\int_0^\pi \cos^3 x (\cos^2 x - \frac{1}{2}) dx}{\int_0^\pi (\cos^2 x - \frac{1}{2})^2 dx} (X^2 - \frac{1}{2}) - \frac{\int_0^\pi \cos^4 x dx}{\int_0^\pi \cos^2 x dx} X - \frac{\int_0^\pi \cos^3 x dx}{\int_0^\pi dx} 1 = X^3 - \frac{3}{4} X, \end{aligned}$$

- c) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la forme bilinéaire symétrique associée φ_A est un produit scalaire $\Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq n, \Delta_i(A) = \det(A_{\alpha\beta})_{1 \leq \alpha, \beta \leq i} > 0$. *Indication.* Soit $A_i = (A_{\alpha\beta})_{1 \leq \alpha, \beta \leq i}$. Noter $b = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Appliquer le procédé de Gram-Schmidt aux vecteurs $e_1, \dots, e_n$ et obtenir une base $b' = (f_1, \dots, f_n)$ orthogonale pour φ_A . Alors $A_i = [\varphi_A]_{(e_1, \dots, e_i)} = {}^t P_i D_i P_i$ où P_i est la matrice de passage de la base $(f_1, \dots, f_i)$ dans la base $(e_1, \dots, e_i)$ qui est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale et D_i est la matrice de φ_A dans la base $(f_1, \dots, f_i)$ qui est diagonale car la base $(f_1, \dots)$ est orthogonale. Donc $\forall i, \varphi_A(f_1, f_1) \dots \varphi_A(f_i, f_i) = \det D_i = \Delta_i(A) \dots$

Exemple. La matrice symétrique $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ définit un produit

scalaire car $\Delta_1(A) = 2, \Delta_2(A) = 3, \Delta_3(A) = 4, \Delta_4(A) = 5 > 0$.