

## II.1 Bases orthogonales

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien.

**Définitions.**

- On dit que  $x, y \in E$  sont *orthogonaux* si  $\langle x, y \rangle = 0$ .
- Une base *orthogonale* de  $E$  est une base  $(e_1, \dots, e_n)$  telle que  $\forall i \neq j, \langle e_i, e_j \rangle = 0$ .
- Une base *orthonormale* ou *orthonormée* de  $E$  est une base  $(e_1, \dots, e_n)$  telle que  $\forall i \neq j, \langle e_i, e_j \rangle = 0, \forall i, \langle e_i, e_i \rangle = 1$ .

**Théorème.** Si  $E$  est un espace euclidien, alors  $E$  admet une base orthogonale. En particulier  $E$  admet une base orthonormale.

*Exercices.*

- (Théorème de Pythagore) Soient  $x, y \in E$ . Montrer que  $\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ .
- Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille de vecteurs de  $E$  telle que  $\forall i \neq j, \langle e_i, e_j \rangle = 0$ . Vérifier que les  $e_i$  sont linéairement indépendants.
- Trouver une base orthonormale pour  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$  avec le produit scalaire usuel.

## II.2 Procédé de Gram-Schmidt

**Théorème.** Soit  $E$  un espace euclidien de base  $(e_1, \dots, e_n)$ . Il existe une unique base  $(f_1, \dots, f_n)$  de  $E$  telle que

- $\forall 1 \leq i \leq n, f_i = e_i \bmod \langle e_1, \dots, e_{i-1} \rangle$ ;
- la base  $(f_1, \dots, f_n)$  est orthogonale.

*Démo.* On définit par récurrence :

$$f_1 = e_1, \forall i > 1, f_i = e_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle e_i, f_k \rangle}{\langle f_k, f_k \rangle} f_k .$$

*Remarques.* En particulier, la base  $(\frac{f_1}{\|f_1\|}, \dots, \frac{f_n}{\|f_n\|})$  est orthonormale.

*Exercices.*

- Si  $e_1, \dots, e_n$  est une base orthonormale de  $E$ , alors  $\forall x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \in E, \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ .

- b) Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la base  $(1, X, X^2, X^3, X^4)$  de  $\mathbb{R}[X]_{\leq 4}$  avec le produit scalaire  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ .
- c) Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que la forme bilinéaire symétrique associée  $\varphi_A$  est un produit scalaire  $\Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq n, \Delta_i(A) = \det(A_{\alpha\beta})_{1 \leq \alpha, \beta \leq i} > 0$ . *Indication. Noter  $c_1, \dots, c_n$  les colonnes de  $A$ . Appliquer le procédé de Gram-Schmidt aux vecteurs  $c_1, \dots, c_n$  et obtenir une famille de vecteurs  $f_1, \dots, f_n$  tels que  $\forall i, \varphi_A(f_1, f_1) \dots \varphi_A(f_i, f_i) = \Delta_i(A)$  ...*

*Exemple.* La matrice symétrique  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  définit un produit scalaire car  $\Delta_1(A) = 2, \Delta_2(A) = 3, \Delta_3(A) = 4$ .

## II.3 Sous-espaces orthogonaux

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien.

**Notation.** Soit  $X \subseteq E$ . On pose  $X^\perp = \{y \in E : \forall x \in X, \langle x, y \rangle = 0\}$ .

C'est l'orthogonal de  $X$ .

### Proposition

- i)  $X^\perp = \text{Vect}(X)^\perp$  est un sous-espace de  $E$ ;
- ii)  $0^\perp = E, E^\perp = 0$ ,
- iii)  $\forall F \leq E, F \leq F^{\perp\perp}, F^\perp = F^{\perp\perp\perp}, E = F \oplus F^\perp$ ,
- iv)  $\forall F, G \leq E, (F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp, F^\perp + G^\perp \leq (F \cap G)^\perp$ .
- v) si  $E$  est de dimension finie, alors  $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ ;
- vi) Si  $E$  est de dimension finie, alors  $\forall F \leq E, F = F^{\perp\perp}, \forall F, G \leq E, F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$ .

## II.4 Projections orthogonales

Soit  $E, \langle \cdot, \cdot \rangle$  un espace euclidien.

### II.4.1 Définition

Soit  $F \leq E$ . Soit  $x \in E$ . Soient  $x_1 \in F, x_2 \in F^\perp$  tels que  $x = x_1 + x_2$ . On pose  $p_F(x) = x_1$ . C'est la *projection orthogonale de  $x$  sur  $F$* .

*Remarque.* Soient  $x, y \in E$ . Alors  $y = p_F(x) \Leftrightarrow y \in F$  et  $x - y \in F^\perp$ .

### II.4.2 Formule

Si  $f_1, \dots, f_k$  est une base orthonormale de  $F$ , alors  $p_F(x) = \langle x, f_1 \rangle f_1 + \dots + \langle x, f_k \rangle f_k$ .

### II.4.3 Distance à un sous-espace

Soit  $x \in E$ , alors  $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\| = \|x - p_F(x)\|$ .

## II.5 Matrices de Gram

**Définition.** Soient  $e_1, \dots, e_n \in E$ . On note  $G(e_1, \dots, e_n) = (\langle e_i, e_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Proposition.**

- La matrice  $G(e_1, \dots, e_n)$  est symétrique positive.
- La matrice  $G(e_1, \dots, e_n)$  est inversible  $\Leftrightarrow$  symétrique définie positive  $\Leftrightarrow e_1, \dots, e_n$  sont  $\mathbb{R}$ -linéairement indépendants.
- Pour tout  $x \in E$ ,  $d(x, F) = \sqrt{\frac{G(x, f_1, \dots, f_n)}{G(f_1, \dots, f_n)}}$  pour toute base quelconque  $(f_1, \dots, f_n)$  de  $F$ .

**Proposition. (Matrice d'une projection orthogonale.)** Soit  $p_F$  la projection orthogonale sur  $F$ . Si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormale de  $E$ , alors

$$[p_F]_{\mathcal{B}} = B({}^t B B)^{-1} {}^t B$$

où  $B = (\langle e_i, f_j \rangle)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k}} \in \mathcal{M}_{nk}$  est la matrice d'une base  $(f_1, \dots, f_k)$  quelconque de  $F$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

*Exemple.* Si  $E = \mathbb{R}^n$ , si  $d$  est une droite, alors  $p_d = \frac{v {}^t v}{{}^t v v}$  où  $v \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$  est le vecteur des coordonnées d'un vecteur directeur de  $d$ .