Cours d'algèbre bilinéaire

I Formes bilinéaires

I.0 Produit scalaire usuel

C'est l'application $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$ où si $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$, $x \cdot y = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$.

Proposition.

i) $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $y \mapsto x \cdot y$ est linéaire.

ii) $\forall\, y \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x \cdot y$ est linéaire.

iii) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \cdot y = y \cdot x$.

iv) $\forall\, 0 \neq x \in \mathbb{R}^n$, $x \cdot x > 0$.

Notation. Si $x \in \mathbb{R}^n$, soit $||x||_2 = \sqrt{x \cdot x}$.

Théorème de Cauchy-Schwarz. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$, $|x \cdot y| \leqslant ||x||_2 ||y||_2$.

Démo. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, $|ab| \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$.

I.1 Formes bilinéaires

Définitions. Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

— Une forme *bilinéaire* sur E est une application $b : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que
  — $\forall\, x \in E$, $b(x, \cdot) : E \to \mathbb{R}$ est linéaire ;
  — $\forall\, y \in E$, $b(\cdot, y) : E \to \mathbb{R}$ aussi.

— On dit que b est *symétrique* si $\forall\, x, y \in E$, $b(x, y) = b(y, x)$. On dit que b est *antisymétrique* si $\forall\, x, y \in E$, $b(x, y) = -b(y, x)$.

Notations. Soient $BL(E)$, *resp.* $BLS(E)$, *resp.* $BLA(E)$, l'ensemble des formes bilinéaires sur E, resp. des formes bilinéaires symétriques, resp. l'ensemble des formes bilinéaires antisymétriques.

Exercices.

1) L'ensemble $BL(E)$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel pour les lois ordinaires et $BL(E) = BLS(E) \oplus BLA(E)$.

2) *Polarisation.*

   i) Soit $b \in BLS(E)$. Alors $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$, $b(x, y) = \frac{1}{2}(b(x+y, x+y) - b(x, x) - b(y, y))$.

ii) Soit $b \in BL(E)$. Alors b antisymétrique $\Leftrightarrow$ b alternée[†].

Exemples.

a) Les applications suivantes sont bilinéaires symétriques.
   - $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$;
   - $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr} AB$;
   - $l_2(\mathbb{N}) \times l_2(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$, $((a_n), (b_n)) \mapsto \sum_{n \geqslant 0} a_n b_n$;
   - $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $(A, B) \mapsto \det(A + B) - \det A - \det B$;
   - $\mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $(f, g) \mapsto \int_{-1}^{1} fg$.

b) L'application $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 y_2 - x_2 y_1$ est bilinéaire antisymétrique.

c) L'application $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 y_2$ est bilinéaire mais ni symétrique ni antisymétrique.

I.2 Matrices

Définition. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. L'application

$$\varphi_A : \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ (X, Y) \mapsto {}^t X A Y$$

est bilinéaire.

Exercice. L'application φ_A est symétrique $\Leftrightarrow$ la matrice A est symétrique. L'application φ_A est antisymétrique $\Leftrightarrow$ la matrice A est antisymétrique.

Notations. Soient $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \ :\ {}^t A = A\}$, $\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \ :\ {}^t A = -A\}$.

Définition. Matrice d'une forme bilinéaire. Soit $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E. Si $\varphi \in BL(E)$, on pose $[\varphi]_{\mathscr{B}} = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$.

Proposition. Avec les notations de la définition.

$$\forall\, x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n,\ \forall\, y = y_1 e_1 + ... + y_n e_n,\ \varphi(x, y) = 4XAY$$

où $A = [\varphi]_{\mathscr{B}}$, $X = {}^t(x_1, ..., x_n)$, $Y = {}^t(y_1, ..., y_n) \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$.

On en déduit le

Théorème. Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension n, de base $\mathscr{B}$. Alors l'application $\varphi \mapsto [\varphi]_{\mathscr{B}}$ définit des isomorphismes d'espaces vectoriels :

$$BL(E) \simeq \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$$

†. *c-à-d* $\forall\, x \in E$, $b(x, x) = 0$.

$$BLS(E) \simeq \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$$

$$BLA(E) \simeq \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \ .$$

Exemple. Soit $E = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$. Soit $\mathscr{B} = (1, x, x^2)$. Soit $\mathscr{B}' = (1, x, 2x^2 - 1)$. Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$, $(f, g) \mapsto \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi f(\cos t) g(\cos t) dt$. Alors

$$[\varphi]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \pi & 0 & \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} & 0 \\ \frac{\pi}{2} & 0 & \frac{3\pi}{8} \end{pmatrix}, [\varphi]_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} .$$

I.3 Formules de changement de bases et congruence des matrices

Proposition. Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension n. Soient $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Soit $\varphi \in BL(E)$. Si $A = [\varphi]_{\mathscr{B}}$, $A' = [\varphi]_{\mathscr{B}'}$, $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ †, alors

$$A' = {}^t PAP \ .$$

Définition. On dit que $A, A' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont congruentes si $A' = {}^t PAP$ pour une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible.

Théorème. Classes de congruences des matrices symétriques et antisymétriques réelles.

i) Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe des entiers $r, s \geqslant 0$ et une matrice inversible $P \in$

†. *c-à-d* si $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$, $\mathscr{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$, alors $P = (p_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où $\forall\, 1 \leqslant j \leqslant n$, $e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$; c'est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{B}'$.

$\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tels que

$$ {}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} $$

matrice diagonale avec r « 1 » et s « -1 ». De plus, $r + s = \mathrm{rg}A$.

ii) Soit $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Alors $\mathrm{rg}A = 2d$ est pair et il existe une matrice inversible P telle que

$$ {}^tPAP = \begin{pmatrix} J & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & J & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} $$

matrice diagonale par blocs avec d blocs $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de taille 2×2.

Démo. Plus tard dans le cours.

I.4 Noyau et rang d'une forme bilinéaire symétrique

Définitions. Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. Soit $\varphi \in BLS(E) \cup BLA(E)$.

— Le *noyau de* φ est $\ker \varphi = \{x \in E \ : \ \forall\, y \in E,\ \varphi(x, y) = 0$.

— Le *rang de* φ, noté $\mathrm{rg}\varphi$, est la dimension de l'image de l'application linéaire $\gamma_\varphi : E \to E^*$, $x \mapsto \varphi(x, \cdot)$ †.

†. On note $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$.

— On dit que φ est *non dégénérée* si $\ker\varphi = 0$.

Remarque. Si E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension n et de base $\mathscr{B}$, si on note $\mathscr{B}^*$ la base duale de E^*, alors $[\varphi]_{\mathscr{B}} = [\gamma_\varphi]_{\mathscr{B},\mathscr{B}^*} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Théorème du rang pour les formes bilinéaires symétriques et antisymétriques. Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension n. Soit $\varphi \in BLS(E) \cup BLA(E)$. Alors :

$$n = \dim\ker\varphi + \mathrm{rg}\varphi \ .$$

I.5 Produits scalaires

Définitions. Soit $\varphi \in BLS(E)$.

— On dit que φ est *positive* si $\forall\, x \in E,\ \varphi(x,x) \geqslant 0$.

— On dit que φ est *définie positive si* $\forall\, 0 \neq x \in E,\ \varphi(x,x) > 0$.

Un *produit scalaire* sur E est une forme bilinéaire symétrique et définie positive $\varphi \in BL(E)$.

Exemple. Le produit scalaire usuel est un produit scalaire.

Exercices.

1) $(A,B) \mapsto \mathrm{Tr}(AB)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
2) $(A,B) \mapsto -\mathrm{Tr}(AB)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

I.6 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire sur un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E.

Notation. pour tout $x \in E$, soit $||x|| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$.

Théorème. Soient $x, y \in E$.

i) $|\langle x,y\rangle| \leqslant ||x||||y||$;
ii) Si $|\langle x,y\rangle| = ||x||||y||$, alors x, y sont liés.

Démo. **Lemme.** Si $A \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$, alors A est diagonalisable.

Corollaire. L'application $E \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, $x \mapsto ||x||$ est une norme.

Exercice. **Identité du prallélogramme.** $\forall\, x, y \in E$, $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$.

I.7 Produit scalaire hermitien

Soit E un $\mathbb{C}-$espace vectoriel.

Définitions.

a) On dit que l'application $E \times E \to \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ est une *forme sesquilinéaire* si

(i) $\forall\, x \in E$, $E \to \mathbb{C}$, $y \mapsto \langle x, y\rangle$ est linéaire ;

(ii) $\forall\, y \in E$, $E \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \langle x, y\rangle$ est *antilinéaire*[†] ;

b) on dit que c'est une forme sesquilinéaire hermitienne si de plus

$$(iii)\ \forall\, x, y \in E,\ \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}\ ;$$

c) on dit que c'est un produit scalaire hermitien si de plus

$$(iv)\ \forall\, x \in E,\ \langle x, x\rangle > 0\,.$$

Exemples.

a) $(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i$ est une forme hermitienne sur $\mathbb{C}^n$.

b) $(f, g) \mapsto \int_{-1}^{1} \overline{f} g$ est une forme hermitienne sur $\mathbb{C}[X]$.

Exercices.

1) Notons $\langle x, y\rangle = \alpha(x, y) + i\beta(x, y)$ avec $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y) \in \mathbb{R}$ pour tous $x, y \in E$. Vérifier que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est une forme sesquilinéaire hermitienne $\Leftrightarrow$ α est bilinéaire symétrique et β est bilinéaire antisymétrique.

2) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Vérifier que $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{C}) \times \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, $(X, Y) \mapsto {}^t\overline{X}AY$ est une forme sesquilinéaire hermitienne $\Leftrightarrow$ ${}^t\overline{A} = A$.

II Espaces euclidiens

Définitions.

— Un espace *préhilbertien* est un couple $(E, \langle \cdot, \cdot\rangle)$ où E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et $\langle \cdot, \cdot\rangle$ un produit scalaire sur E.

— Un espace *euclidien* est un couple $(E, \langle \cdot, \cdot\rangle)$ où E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel *de dimension finie* et $\langle \cdot, \cdot\rangle$ un produit scalaire sur E.

Exemple. $\mathbb{R}^n$ avec le produit scalaire usuel.

†. *c-à-d* $\forall\, x, x' \in E$, $\langle x + x', y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle$, $\forall\, x \in E$, $\forall\, t \in \mathbb{C}$, $\langle tx, y\rangle = \overline{t}\langle x, y\rangle$.

II.1 Bases orthogonales

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Définitions.

a) On dit que $x, y \in E$ sont *orthogonaux* si $\langle x, y \rangle = 0$.

b) Une base *orthogonale* de E est une base $(e_1, ..., e_n)$ telle que $\forall i \neq j$, $\langle e_i, e_j \rangle = 0$.

c) Une base *orthonormale ou orthonormée* de E est une base $(e_1, ..., e_n)$ telle que $\forall\, i \neq j$, $\langle e_i, e_j \rangle = 0$, $\forall\, i$, $\langle e_i, e_i \rangle = 1$.

Théorème. Si E est un espace euclidien, alors E admet une base orthogonale. En particulier E admet une base orthonormale.

Exercices.

1) *(Théorème de Pythagore)* Soient $x, y \in E$. Montrer que $\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow ||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.

2) Soit $(e_1, ..., e_n)$ une famille de vecteurs de E telle que $\forall\, i \neq j$, $\langle e_i, e_j \rangle = 0$. Vérifier que les e_i sont linéairement indépendants.

3) Trouver une base orthonormale pour $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x + y + z = 0\}$ avec le produit scalaire usuel.

II.2 Procédé de Gram-Schmidt

Théorème. Soit E un espace euclidien de base $(e_1, ..., e_n)$. Il existe une unique base $(f_1, ..., f_n)$ de E telle que

(i) $\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n$, $f_i = e_i \bmod \langle e_1, ..., e_{i-1} \rangle$;

(ii) la base $(f_1, ..., f_n)$ est orthogonale.

Démo. On définit par récurrence :

$$f_1 = e_1,\ \forall\, i > 1,\ f_i = e_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle e_i, f_k \rangle}{\langle f_k, f_k \rangle} f_k \ .$$

Remarques. En particulier, la base $(\frac{f_1}{||f_1||}, ..., \frac{f_n}{||f_n||})$ est orthonormale.

Exercices.

a) Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la base $(1, X, X^2, X^3, X^4)$ de $\mathbb{R}[X]_{\leqslant 4}$ avec le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

b) Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la forme bilinéaire symétrique associée φ_A est un produit scalaire $\Leftrightarrow$ $\forall\ 1 \leqslant i \leqslant n$, $\Delta_i(A) = \det(A_{\alpha\beta})_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant i} > 0$. *Indication. Noter $c_1, ..., c_n$ les colonnes de A. Appliquer le procédé de Gram-Schmidt aux vecteurs $c_1, ..., c_n$ et obtenir une famille de vecteurs $f_1, ..., f_n$ tels que $\forall\ i$, $\varphi_A(f_1, f_1)...\varphi_A(f_i, f_i) = \Delta_i(A)$ ...*