Cours d'algèbre bilinéaire

I Formes bilinéaires

I.0 Produit scalaire usuel

C'est l'application $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$ où si $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$, $x \cdot y = x_1y_1 + ... + x_ny_n$.

Proposition.

i) $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $y \mapsto x \cdot y$ est linéaire.

ii) $\forall\, y \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x \cdot y$ est linéaire.

iii) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \cdot y = y \cdot x$.

iv) $\forall\, 0 \neq x \in \mathbb{R}^n$, $x \cdot x > 0$.

Notation. Si $x \in \mathbb{R}^n$, soit $||x||_2 = \sqrt{x \cdot x}$.

Théorème de Cauchy-Schwarz. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$, $|x \cdot y| \leqslant ||x||_2||y||_2$.

Démo. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, $|ab| \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$.

I.1 Formes bilinéaires

Définitions. Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

— Une forme *bilinéaire* sur E est une application $b : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que
  — $\forall\, x \in E$, $b(x, \cdot) : E \to \mathbb{R}$ est linéaire ;
  — $\forall\, y \in E$, $b(\cdot, y) : E \to \mathbb{R}$ aussi.

— On dit que b est *symétrique* si $\forall\, x, y \in E$, $b(x, y) = b(y, x)$. On dit que b est *antisymétrique* si $\forall\, x, y \in E$, $b(x, y) = -b(y, x)$.

Notations. Soient $BL(E)$, *resp.* $BLS(E)$, *resp.* $BLA(E)$, l'ensemble des formes bilinéaires sur E, resp. des formes bilinéaires symétriques, resp. l'ensemble des formes bilinéaires antisymétriques.

Exercices.

1) L'ensemble $BL(E)$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel pour les lois ordinaires et $BL(E) = BLS(E) \oplus BLA(E)$.

2) *Polarisation.*

   i) Soit $b \in BLS(E)$. Alors $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$, $b(x, y) = \frac{1}{2}(b(x+y, x+y) - b(x, x) - b(y, y))$.

ii) Soit $b \in BL(E)$. Alors b antisymétrique $\Leftrightarrow$ b alternée[†].

Exemples.

a) Les applications suivantes sont bilinéaires symétriques.
— $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$;
— $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr} AB$;
— $l_2(\mathbb{N}) \times l_2(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$, $((a_n), (b_n)) \mapsto \sum_{n \geqslant 0} a_n b_n$;
— $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $(A, B) \mapsto \det(A + B) - \det A - \det B$;
— $\mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $(f, g) \mapsto \int_{-1}^{1} fg$.

b) L'application $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 y_2 - x_2 y_1$ est bilinéaire antisymétrique.

c) L'application $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 y_2$ est bilinéaire mais ni symétrique ni antisymétrique.

I.2 Matrices

Définition. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. L'application

$$\varphi_A : \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ (X, Y) \mapsto {}^t X A Y$$

est bilinéaire.

Exercice. L'application φ_A est symétrique $\Leftrightarrow$ la matrice A est symétrique. L'application φ_A est antisymétrique $\Leftrightarrow$ la matrice A est antisymétrique.

Notations. Soient $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \ :\ {}^t A = A\}$, $\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \ :\ {}^t A = -A\}$.

Définition. Matrice d'une forme bilinéaire. Soit $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E. Si $\varphi \in BL(E)$, on pose $[\varphi]_{\mathscr{B}} = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Proposition. Avec les notations de la définition.

$$\forall\, x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n,\ \forall\, y = y_1 e_1 + ... + y_n e_n,\ \varphi(x, y) = 4XAY$$

où $A = [\varphi]_{\mathscr{B}}$, $X = {}^t(x_1, ..., x_n)$, $Y = {}^t(y_1, ..., y_n) \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$.

On en déduit le

Théorème. Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension n, de base $\mathscr{B}$. Alors l'application $\varphi \mapsto [\varphi]_{\mathscr{B}}$ définit des isomorphismes d'espaces vectoriels :

$$BL(E) \simeq \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$$

†. *c-à-d* $\forall\, x \in E$, $b(x, x) = 0$.

$$BLS(E) \simeq \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$$

$$BLA(E) \simeq \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \ .$$

Exemple. Soit $E = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$. Soit $\mathscr{B} = (1, x, x^2)$. Soit $\mathscr{B}' = (1, x, 2x^2 - 1)$. Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$, $(f, g) \mapsto \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi f(\cos t) g(\cos t) dt$. Alors

$$[\varphi]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \pi & 0 & \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} & 0 \\ \frac{\pi}{2} & 0 & \frac{3\pi}{8} \end{pmatrix}, [\varphi]_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} .$$

I.3 Formules de changement de bases et congruence des matrices

Proposition. Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension n. Soient $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Soit $\varphi \in BL(E)$. Si $A = [\varphi]_{\mathscr{B}}$, $A' = [\varphi]_{\mathscr{B}'}$, $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ †, alors

$$A' = {}^tPAP \ .$$

Définition. On dit que $A, A' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont congruentes si $A' = {}^tPAP$ pour une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible.

Théorème. Classes de congruences des matrices symétriques et anti-symétriques réelles.

i) Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe des entiers $r, s \geqslant 0$ et une matrice inversible $P \in$

†. *c-à-d* si $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$, $\mathscr{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$, alors $P = (p_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où $\forall\, 1 \leqslant j \leqslant n$, $e'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i$; c'est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{B}'$.

$\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tels que

$$ {}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix} $$

matrice diagonale avec r « 1 » et s « -1 ». De plus, $r + s = \text{rg}A$.

ii) Soit $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Alors $\text{rg}A = 2d$ est pair et il existe une matrice inversible P telle que

$$ {}^tPAP = \begin{pmatrix} J &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && J &&& \\ &&& 0 && \\ &&&& \ddots & \\ &&&&& 0 \end{pmatrix} $$

matrice diagonale par blocs avec d blocs $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de taille 2×2.

Démo. Plus tard dans le cours.

I.4 Noyau et rang d'une forme bilinéaire symétrique

Définitions. Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. Soit $\varphi \in BLS(E) \cup BLA(E)$.

— Le *noyau de* φ est $\ker \varphi = \{x \in E \ : \ \forall\, y \in E,\ \varphi(x, y) = 0$.

— Le *rang de* φ, noté $\text{rg}\varphi$, est la dimension de l'image de l'application linéaire $\gamma_\varphi : E \to E^*$, $x \mapsto \varphi(x, \cdot)$ †.

†. On note $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$.

— On dit que φ est *non dégénérée* si $\ker\varphi = 0$.

Remarque. Si E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension n et de base $\mathscr{B}$, si on note $\mathscr{B}^*$ la base duale de E^*, alors $[\varphi]_{\mathscr{B}} = [\gamma_\varphi]_{\mathscr{B},\mathscr{B}^*} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Théorème du rang pour les formes bilinéaires symétriques et antisymétriques. Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension n. Soit $\varphi \in BLS(E) \cup BLA(E)$. Alors :

$$n = \dim\ker\varphi + \mathrm{rg}\varphi \ .$$

I.5 Produits scalaires

Définitions. Soit $\varphi \in BLS(E)$.

— On dit que φ est *positive* si $\forall\, x \in E,\ \varphi(x,x) \geqslant 0$.

— On dit que φ est *définie positive si* $\forall\, 0 \neq x \in E,\ \varphi(x,x) > 0$.

Un *produit scalaire* sur E est une forme bilinéaire symétrique et définie positive $\varphi \in BL(E)$.

Exemple. Le produit scalaire usuel est un produit scalaire.

Exercices.

1) $(A,B) \mapsto \mathrm{Tr}(AB)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
2) $(A,B) \mapsto -\mathrm{Tr}(AB)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.