VI.2 Espaces affines

Définition. Un espace affine réel est un ensemble $\mathscr{E}$ avec une action simplement transitive d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E *c-à-d* une application

$$E \times \mathscr{E} \to \mathscr{E}$$

telle que

(i) $^\forall x \in \mathcal{E},\, x + \overrightarrow{0} = x$.

(ii) $^\forall x \in \mathcal{E}, {}^\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E,\, (x + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v} = x + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$.

(iii) $^\forall x, y \in \mathcal{E},\, \exists\,! \overrightarrow{u} \in E,\, x + \overrightarrow{u} = y$.

La *dimension* de $\mathcal{E}$ est $\dim \mathcal{E} = \dim E$.

Notation. Si $x + \overrightarrow{u} = y$, on note $\overrightarrow{xy} := \overrightarrow{u}$. On note parfois $E = \overrightarrow{\mathcal{E}}$.

Relation de Chasles. $^\forall x, y, z \in \mathcal{E},\, \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$.

Exemple. $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$ avec $\overrightarrow{\mathcal{E}} = \mathbb{R}^n$ et l'addition usuelle.

Définition. Sous-espaces affines. Soit $\mathcal{E}$ un $\mathbb{R}-$espace affine. Un sous-ensemble $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ est un *sous-espace affine* si $\mathcal{F} \neq \varnothing$ ou $\exists\, x \in \mathcal{F},\, F \leqslant \overrightarrow{\mathcal{E}},\, \mathcal{F} = x + F$. $(\Leftrightarrow \{\overrightarrow{ab} \,:\, a, b \in \mathcal{F}\} \leqslant \overrightarrow{\mathcal{E}})$.

Sous-espaces engendrés. Soit $\varnothing \neq X \subseteq \mathcal{E}$. Soit $x_0 \in X$. On note $\mathrm{Aff}(X) = x_0 + \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{x_0 x} \,:\, x \in X\}$. C'est le plus petit sous-espace affine de $\mathcal{E}$ contenant X. Et c'est indépendant du choix de $x_0 \in X$.

Définitions.Affinement indépendants. On dit que $A_1, ..., A_N \in \mathcal{E}$ sont $\mathbb{R}-$*affinement indépendants* si les vecteurs $\overrightarrow{A_1A_2}, ..., \overrightarrow{A_1A_N}$ sont $\mathbb{R}-$linéairement indépendants.

Repère. Un repère de $\mathcal{E}$ est la donnée d'un point $O \in \mathcal{E}$ et d'une base $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

Remarque. Dans ce cas, $^\forall x \in \mathcal{E}, \exists\,!(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,\, x = O + x_1\overrightarrow{u_1} + + ... + x_n\overrightarrow{u_n}$.

Exercice. À l'aide de la relation de Chasles, montrer que $\overrightarrow{A_1A_2}, ..., \overrightarrow{A_1A_N}$ sont $\mathbb{R}-$linéairement indépendants $\Leftrightarrow$ $^\forall i,\, \overrightarrow{A_iA_j},\, 1 \leqslant j \neq i \leqslant N$ sont aussi $\mathbb{R}-$linéairement indépendants.

VI.3 Transformations affines

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel. On notera $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel associé.

Définition. Une *transformation affine* $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une application telle qu'il existe $A \in \mathcal{E}$ et $\overrightarrow{T} \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\overrightarrow{\mathcal{E}})$ tels que

$$\forall M \in \mathcal{E},\, T(M) = T(A) + \overrightarrow{T}(\overrightarrow{AM}) \ .$$

Remarque. Dans ce cas, $\forall M, N \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{T(M)T(N)} = \overrightarrow{T}(\overrightarrow{MN})$.

Exemples. Les translations $t_{\overrightarrow{u}} : x \mapsto x + \overrightarrow{u}$, les homothéties $h_{A,\lambda} : x \mapsto A + \lambda\overrightarrow{Ax}$, $A \in \mathcal{E}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ sont des applications affines.

Propriétés.

a) Si S, T sont des transformations affines, alors $S \circ T$ aussi et $\overrightarrow{S \circ T} = \overrightarrow{S}\,\overrightarrow{T}$.

b) Si T est une transformation affine bijective, alors sa réciproque T^{-1} aussi.

c) $\forall T$ transformation affine, $\forall O \in \mathcal{E}$, $\exists\,!\, \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$, $\exists\,!\, T'$ transformation affine, $T'(O) = O$ et $T = t_{\overrightarrow{u}} \circ T'$.

Définition. Le *groupe affine de* $\mathcal{E}$, noté $GA(\mathcal{E})$, est le groupe des bijections affines $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$.

Exercices.

1) Déterminer $GA(\mathbb{R})$.

2) Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\begin{aligned} &T \text{ affine} \\ \Leftrightarrow\ &\forall \lambda \in \mathbb{R},\, \forall x, y \in \mathbb{R}^n,\, T(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda T(x) + (1-\lambda)T(y) \\ \Leftrightarrow\ &\forall 0 < \lambda < 1,\, \forall x, y \in \mathbb{R}^n,\, T(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda T(x) + (1-\lambda)T(y) \ . \end{aligned}$$

VI.4 Isométries affines

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien, *c-à-d* $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est une espace euclidien.

Théorème. Soit $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application telle que

$$\forall M, N \in \mathcal{E},\, ||\overrightarrow{T(M)T(N)}|| = ||MN|| \ .$$

Alors T est une transformation affine bijective.

On dit que T est une *isométrie affine.*

Démo. l suffit de démontrer que T est affine car alors $\overrightarrow{T} \in \mathcal{O}(\mathcal{E})$ est inversible et donc T est bijective *(exo).*

Supposons que $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$ avec le produit scalaire usuel. On a $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $||T(x) - T(y)|| = ||x - y||$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, $0 < \lambda < 1$. Soit $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$).

Alors

$$||z - x|| = (1 - \lambda)||x - y|| \Rightarrow ||T(z) - T(x)|| = (1 - \lambda)||T(x) - T(y)||$$

$$\begin{aligned} ||z - y|| = \lambda||x - y|| &\Rightarrow ||T(z) - T(y)|| = \lambda||T(x) - T(y)|| \\ &\Rightarrow ||T(x) - T(y)|| = ||T(x) - T(z)|| + ||T(z) - T(y)|| \\ &\Rightarrow \exists\, s > 0,\ T(z) - T(y) = s(T(x) - T(z)) \ . \end{aligned}$$

Mais alors

$$T(z) = sT(x) + (1 - s)T(y) \Rightarrow ||T(z) - T(y)|| = s||T(x) - T(y)|| = \lambda||T(x) - T(y)||$$

$$\Rightarrow s = \lambda$$

d'où $T(z) = \lambda T(x) + (1 - \lambda)T(y)$ **Q.e.d.**

Définition. Un *déplacement* est une isométrie f tel que dét $\overrightarrow{f} = 1$; un *antidéplacement* est une isométrie f tel que dét $\overrightarrow{f} = -1$.

VI.5 Isométries affines de $\mathbb{R}^2$

Exemples.

a) Les translations.

b) La rotation de centre A et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$: $r_{A,\theta}(M) = A + \overrightarrow{r}_\theta(\overrightarrow{AM})$ où $\overrightarrow{r}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

c) La symétrie orthogonale par rapport à la droite $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$: $\forall M$, $s_\Delta(M) = M'$ tel que Δ est la *médiatrice* de $[M, M']$ †

Théorème. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une isométrie ALORS

— f est une translation : $f = t_{\overrightarrow{u}}$ pour un vecteur $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$;

— ou f est une rotation : $f = r_{A,\theta}$ pour un point $A \in \mathbb{R}^2$ et un angle $\theta \in \mathbb{R}$;

— ou f est une *réflexion glissée* : $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ s_\Delta$ pour une droite affine $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ et un vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\Delta}$.

†. *c-à-d* $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ ||Mx|| = ||M'x||\}$.

Exercice. Trouver le centre de la rotation

$$(x,y) \mapsto \left(-\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1, \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{y}{2} + 1\right) \ .$$

VI.6 Isométries affines de $\mathbb{R}^3$

Exemples.

a) La rotation $R_{A,\overrightarrow{k},\theta}(M) = A + R_{\overrightarrow{k},\theta}(\overrightarrow{AM})$ d'angle θ et d'axe $A + \mathbb{R}\overrightarrow{k}$ où $||\overrightarrow{k}|| = 1$, $\theta \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^3$. †.

b) La réflexion orthogonale de plan $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^3$ définie par $r_{\mathcal{P}}(M) = M'$ où $\mathcal{P}$ est le plan médiateur de $[MM']$ ‡

Théorème. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une isométrie. ALORS

— f est une translation : $f = t_{\overrightarrow{u}}$ pour un $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$;

— ou f est un *vissage* : $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ R_{A,\overrightarrow{k},\theta}$ où $A \in \mathbb{R}^3$, $||\overrightarrow{k}|| = 1$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}\overrightarrow{k}$;

— ou f est une *antirotation* $f = S_{\mathcal{P}} \circ R$ où $S_{\mathcal{P}}$ est une réflexion orthogonale par rapport au plan $\mathcal{P}$, R est une rotation d'axe D avec $D \perp \mathcal{P}$;

— ou f est une *réflexion glissée* : $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ S_{\mathcal{P}}$ où $S_{\mathcal{P}}$ est une réflexion orthogonale par rapport au plan $\mathcal{P}$ avec $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Corollaire. Un déplacement de $\mathbb{R}^3$ avec un point fixe est une rotation. *(Euler)*

Exemple. Soit $f(x,y,z) = (-y+1, x+1, z+1)$. Alors f est un vissage : $f = t_{\overrightarrow{e_3}} \circ R_{A,\overrightarrow{e_3},-\frac{\pi}{2}}$ avec $A = (0,1,0)$.

†. et $\forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{R}_{\overrightarrow{k},\theta}(\overrightarrow{v}) = \cos\theta\overrightarrow{v} + \sin\theta\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{v} + (1-\cos\theta)(\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{v})\overrightarrow{k}$.

‡. *c-à-d* $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ ||Mx|| = ||M'x||\}$.