

VI.2 Espaces affines

Définition. Un espace affine réel est un ensemble $\mathcal{E}$ avec une action simplement transitive d'un $\mathbb{R}$ –espace vectoriel E c-à-d une application

$$E \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$$

telle que

- (i) $\forall x \in \mathcal{E}, x + \vec{0} = x.$
- (ii) $\forall x \in \mathcal{E}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in E, (x + \vec{u}) + \vec{v} = x + (\vec{u} + \vec{v}).$
- (iii) $\forall x, y \in \mathcal{E}, \exists ! \vec{u} \in E, x + \vec{u} = y.$

La *dimension* de $\mathcal{E}$ est $\dim \mathcal{E} = \dim E.$

Notation. Si $x + \vec{u} = y$, on note $\overrightarrow{xy} := \vec{u}$. On note parfois $E = \vec{\mathcal{E}}$.

Relation de Chasles. $\forall x, y, z \in \mathcal{E}, \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}.$

Exemple. $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$ avec $\vec{\mathcal{E}} = \mathbb{R}^n$ et l'addition usuelle.

Définition. Sous-espaces affines. Soit $\mathcal{E}$ un $\mathbb{R}$ –espace affine. Un sous-ensemble $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ est un *sous-espace affine* si $\mathcal{F} \neq \emptyset$ ou $\exists x \in \mathcal{F}, F \leq \vec{\mathcal{E}}, \mathcal{F} = x + F.$
($\Leftrightarrow \{\overrightarrow{ab} : a, b \in \mathcal{F}\} \leq \vec{\mathcal{E}}$).

Sous-espaces engendrés. Soit $\emptyset \neq X \subseteq \mathcal{E}$. Soit $x_0 \in X$. On note $\text{Aff}(X) = x_0 + \text{Vect}\{\overrightarrow{x_0x} : x \in X\}$. C'est le plus petit sous-espace affine de $\mathcal{E}$ contenant X . Et c'est indépendant du choix de $x_0 \in X$.

Définitions. Affinement indépendants. On dit que $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{E}$ sont $\mathbb{R}$ –*affinement indépendants* si les vecteurs $\overrightarrow{A_1A_2}, \dots, \overrightarrow{A_1A_N}$ sont $\mathbb{R}$ –linéairement indépendants.

Repère. Un repère de $\mathcal{E}$ est la donnée d'un point $O \in \mathcal{E}$ et d'une base $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ de $\vec{\mathcal{E}}$.

Remarque. Dans ce cas, $\forall x \in \mathcal{E}, \exists ! (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x = O + x_1\vec{u}_1 + \dots + x_n\vec{u}_n.$

Exercice. À l'aide de la relation de Chasles, montrer que $\overrightarrow{A_1A_2}, \dots, \overrightarrow{A_1A_N}$ sont $\mathbb{R}$ –linéairement indépendants $\Leftrightarrow \forall i, \overrightarrow{A_iA_j}, 1 \leq j \neq i \leq N$ sont aussi $\mathbb{R}$ –linéairement indépendants.

VI.3 Transformations affines

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel. On notera $\vec{\mathcal{E}}$ le $\mathbb{R}$ –espace vectoriel associé.

Définition. Une *transformation affine* $T : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ est une application telle qu'il existe $A \in \mathcal{E}$ et $\vec{T} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\vec{\mathcal{E}})$ tels que

$$\forall M \in \mathcal{E}, T(M) = T(A) + \vec{T}(\overrightarrow{AM}) .$$

Remarque. Dans ce cas, $\forall M, N \in \mathcal{E}, \overrightarrow{T(M)T(N)} = \vec{T}(\overrightarrow{MN})$.

Exemples. Les translations $t_{\vec{u}} : x \mapsto x + \vec{u}$, les homothéties $h_{A,\lambda} : x \mapsto A + \lambda \overrightarrow{Ax}$, $A \in \mathcal{E}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ sont des applications affines.

Propriétés.

- a) Si S, T sont des transformations affines, alors $S \circ T$ aussi et $\overrightarrow{S \circ T} = \vec{S} \vec{T}$.
- b) Si T est une transformation affine bijective, alors sa réciproque T^{-1} aussi.
- c) $\forall T$ transformation affine, $\forall O \in \mathcal{E}, \exists ! \vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}, \exists ! T'$ transformation affine, $T'(O) = O$ et $T = t_{\vec{u}} \circ T'$.

Définition. Le *groupe affine* de $\mathcal{E}$, noté $GA(\mathcal{E})$, est le groupe des bijections affines $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$.

Exercices.

- 1) Déterminer $GA(\mathbb{R})$.
- 2) Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Montrer que

T affine

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}^n, T(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda T(x) + (1 - \lambda)T(y) \\ &\Leftrightarrow \forall 0 < \lambda < 1, \forall x, y \in \mathbb{R}^n, T(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda T(x) + (1 - \lambda)T(y) . \end{aligned}$$

VI.4 Isométries affines

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien, *c-à-d* $\vec{\mathcal{E}}$ est un espace euclidien.

Théorème. Soit $T : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une application telle que

$$\forall M, N \in \mathcal{E}, \|\overrightarrow{T(M)T(N)}\| = \|MN\| .$$

Alors T est une transformation affine bijective.

On dit que T est une *isométrie affine*.

Démo. Il suffit de démontrer que T est affine car alors $\vec{T} \in \mathcal{O}(\mathcal{E})$ est inversible et donc T est bijective (*exo*).

Supposons que $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$ avec le produit scalaire usuel. On a $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n, 0 < \lambda < 1$. Soit $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$.

Alors

$$\|z - x\| = (1 - \lambda)\|x - y\| \Rightarrow \|T(z) - T(x)\| = (1 - \lambda)\|T(x) - T(y)\|$$

$$\|z - y\| = \lambda\|x - y\| \Rightarrow \|T(z) - T(y)\| = \lambda\|T(x) - T(y)\|$$

$$\Rightarrow \|T(x) - T(y)\| = \|T(x) - T(z)\| + \|T(z) - T(y)\|$$

$$\Rightarrow \exists s > 0, T(z) - T(y) = s(T(x) - T(z)) .$$

Mais alors

$$T(z) = sT(x) + (1 - s)T(y) \Rightarrow \|T(z) - T(y)\| = s\|T(x) - T(y)\| = \lambda\|T(x) - T(y)\|$$

$$\Rightarrow s = \lambda$$

d'où $T(z) = \lambda T(x) + (1 - \lambda)T(y)$

Q.e.d.

Définition. Un *déplacement* est une isométrie f tel que $\det \vec{f} = 1$; un *antidéplacement* est une isométrie f tel que $\det \vec{f} = -1$.

VI.5 Isométries affines de $\mathbb{R}^2$

Exemples.

- Les translations.
- La rotation de centre A et d'angle $\theta \in \mathbb{R} : r_{A,\theta}(M) = A + \vec{r}_\theta(\overrightarrow{AM})$ où $\vec{r}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.
- La symétrie orthogonale par rapport à la droite $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2 : \forall M, s_\Delta(M) = M'$ tel que Δ est la *médiatrice* de $[M, M']^\dagger$

Théorème. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une isométrie ALORS

- f est une translation : $f = t_{\vec{u}}$ pour un vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$;
- ou f est une rotation : $f = r_{A,\theta}$ pour un point $A \in \mathbb{R}^2$ et un angle $\theta \in \mathbb{R}$;
- ou f est une *réflexion glissée* : $f = t_{\vec{u}} \circ s_\Delta$ pour une droite affine $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ et un vecteur $\vec{u} \in \vec{\Delta}$.

[†]. c-à-d $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|Mx\| = \|M'x\|\}$.

VI.6 Isométries affines de $\mathbb{R}^3$

Exemples.

- a) La rotation d'axe $(D, \vec{e})$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$, où $D \subseteq \mathbb{R}^3$ est une droite *affine*, $\vec{e} \in \vec{D}$ et $\|\vec{e}\| = 1$, est définie par ${}^v M, R_{D, \vec{e}, \theta}(M) = A + \vec{R}_{\vec{e}, \theta}(\overrightarrow{AM})$ où $A \in D$ et $\vec{R}_{\vec{e}, \theta}$ est la rotation vectorielle d'axe $\vec{e}$ et d'angle $\theta^\dagger$.
- b) La réflexion orthogonale de plan $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^3$ définie par $r_{\mathcal{P}}(M) = M'$ où $\mathcal{P}$ est le plan médiateur de $[MM']^\ddagger$

Théorème. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une isométrie. ALORS

- f est une translation : $f = t_{\vec{u}}$ pour un $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$;
- ou f est un *vissage* : $f = t_{\vec{u}} \circ R_{D, \vec{e}, \theta}$ où D est une droite affine, $\vec{e} \in \vec{D}$ de norme 1, $\theta \in \mathbb{R}$, $\vec{u} \in \vec{D}$;
- ou f est une *antirotation* $f = S_{\mathcal{P}} \circ R$ où $S_{\mathcal{P}}$ est une réflexion orthogonale par rapport au plan $\mathcal{P}$, R est une rotation d'axe D avec $D \perp \mathcal{P}$;
- ou f est une *réflexion glissée* : $f = t_{\vec{u}} \circ S_{\mathcal{P}}$ où $S_{\mathcal{P}}$ est une réflexion orthogonale par rapport au plan $\mathcal{P}$ avec $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$.

† . c-à-d ${}^v \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{R}_{\vec{e}, \theta}(\vec{v}) = \cos \theta \vec{v} + \sin \theta \vec{e} \wedge \vec{v} + (1 - \cos \theta)(\vec{e} \cdot \vec{v})\vec{e}$.

‡ . c-à-d $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|Mx\| = \|M'x\|\}$.