

V.2 Les matrices antisymétriques réelles

V.2.1 le rang

Théorème. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que

$${}^t P A P = \left(\begin{array}{ccc|c} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & & \\ & \cdots & & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \\ \hline & & & 0 \end{array} \right)$$

avec r blocs $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ où $2r = \text{rg} A$.

Démo. Si $n = 2$. On a

$$\forall m \neq 0, \begin{pmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & m \\ -m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Exemple. } {}^t P \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} P = \left(\begin{array}{ccc|c} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & & \\ & \cdots & & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \\ \hline & & & 0 \end{array} \right)$$

où $P = (\delta_{i,2j-1} + \delta_{i,2(j-n)})_{1 \leq i,j \leq 2n} \in O_{2n}(\mathbb{R})$.

V.2.2 Pfaffien

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.

$$\text{Si } {}^t P A P = \left(\begin{array}{ccc|c} \begin{pmatrix} 0 & m_1 \\ -m_1 & 0 \end{pmatrix} & & & \\ & \cdots & & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & m_n \\ -m_n & 0 \end{pmatrix} & \\ \hline & & & 0 \end{array} \right), \text{ pour une matrice } P \text{ inversible,}$$

alors on pose

$$\text{Pf} A = \frac{m_1 \dots m_n}{\det P}.$$

Proposition. *C'est bien défini !*

Exercices.

$$1) \quad (\text{Pf} A)^2 = \det A.$$

$$2) \quad \text{Pf} \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix} = a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{23}a_{34}.$$

Indication. Si $a_{12} \neq 0$, soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a_{23}}{a_{12}} & \frac{a_{24}}{a_{12}} \\ 0 & 1 & -\frac{a_{13}}{a_{12}} & -\frac{a_{14}}{a_{12}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3) $\forall P \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), Pf({}^tPAP) = \det P Pf A$.

V.2.3 Le groupe symplectique $\text{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$

Soit $J = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array} \right) \in \text{GL}_{2n}(\mathbb{R})$.

Définition. $\text{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}) : {}^tAJA = J\}$.

Théorème. $\text{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\text{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ et $\forall g \in \text{Sp}_{2n}(\mathbb{R}), \det g = 1$.

Démo. On vérifie que $\text{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\text{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ stable par ${}^t \cdot$ et que $g \in \text{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \Rightarrow \det g^2 = 1 \Rightarrow \det g = \pm 1$. Soit $g \in \text{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap O_{2n}(\mathbb{R})$. Alors

$$g = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$$

pour certaines $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$${}^tgJg = J \Leftrightarrow Jg = gJ \Leftrightarrow A = D, B = -C.$$

Or

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c|c} I_n & I_n \\ \hline iI_n & -iI_n \end{array} \right)^{-1} \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B & A \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} I_n & I_n \\ \hline iI_n & -iI_n \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{c|c} A + iB & 0 \\ \hline O & A - iB \end{array} \right) \\ \Rightarrow \det g &= \left| \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B & A \end{array} \right| = |\det(A + iB)|^2 > 0 \Rightarrow \det g = 1. \end{aligned}$$

On applique la décomposition polaire à $g \in \text{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ quelconque : $g = OS$ où $O \in O_{2n}(\mathbb{R}), S \in \mathcal{S}_{2n}^{++}(\mathbb{R})$. En particulier, $S = \sqrt{{}^tgg}$. Soit $B = {}^tgg$. Soit $P(X)$ tel que $\forall \lambda$ valeur propre de tgg , $P(\lambda) = \sqrt{\lambda}, P(\lambda^{-1}) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. Alors $P(B) = \sqrt{B}, P(B^{-1}) = \sqrt{B}^{-1}$.

Comme $B \in \text{Sp}_{2n}(\mathbb{R}), JB = {}^tB^{-1}J$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, JB^n = ({}^tB^{-1})^n J$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow JP(B) = P({}^tB^{-1})J \\
&\Rightarrow J\sqrt{B} = \sqrt{B}^{-1}J \\
&\Rightarrow S = \sqrt{B} \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \\
&\Rightarrow O \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \\
&\Rightarrow \det O = 1
\end{aligned}$$

car O orthogonale

$$\Rightarrow \det g = \det O \det S = \det S > 0$$

car S est symétrique définie positive

$$\Rightarrow \det g = 1$$

Q.e.d.

VI Géométrie affine

VI.1 Sous-espaces affines de $\mathbb{R}^n$

Définition. On dit que $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$ est un sous-espace affine si $\mathcal{F} = \emptyset$ ou $\mathcal{F} = x + F = \{x + u : u \in F\}$ pour un certain $x \in \mathbb{R}^n$ et un $F \leq \mathbb{R}^n$.

Un sous-espace affine non vide de dimension 0 est un point. Un sous-espace affine de dimension 1 est une *droite*.

Exercices.

- 1) Trouver l'équation de la droite qui passe par les points $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ du plan affine $\mathbb{R}^2$.
- 2) Trouver les équations de la droite qui passe par les points $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B)$ de l'espace affine $\mathbb{R}^3$.
- 3) Soient $d_i = (a_i x + b_i y + c_i = 0)$, $i = 1, 2, 3$ trois droites du plan affine $\mathbb{R}^2$ avec $\forall i = 1, 2, 3, a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}, (a_i, b_i) \neq (0, 0)$. Montrer que $d_1 \cap d_2 \cap d_3 \neq \emptyset \Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$