(1)

Ex.1 : $b_k(A,B) := Tr({}^tAB) - k\cdot Tr(A)Tr(B)$ avec $k\in\mathbb{R}$,
$A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Mque pour $\forall\, k\in\mathbb{R}$, b_k est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

→ b_k est symétrique : $b_k(A,B) = Tr({}^tAB) - kTr(A)Tr(B)$
$= Tr({}^t({}^tAB)) - kTr(A)Tr(B)$ ← car $Tr(U) = Tr({}^tU)$
$= Tr({}^tBA) - kTr(A)Tr(B)$ pour $\forall\, U\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
$= b_k(B,A)$.

→ b_k est linéaire à droite : $b_k(A, \lambda B + C) = Tr({}^tA(\lambda B+C)) - kTr(A)Tr(\lambda B + C)$
par linéarité de Tr ← $= \lambda Tr({}^tAB) + Tr({}^tAC) - \lambda k Tr(A)Tr(B) - kTr(A)Tr(C)$
$= \lambda Tr({}^tAB) - \lambda k Tr(A)Tr(B) + Tr({}^tAC) - kTr(A)Tr(C)$
$= \lambda b_k(A,B) + b_k(A,C)$.

Donc par symétrie b_k est aussi linéaire à gauche.

2) On suppose que $k \geq \frac{1}{n}$. Mque b_k n'est pas un produit scalaire.

$b_k(I,I) = Tr({}^tII) - kTr(I)Tr(I)$
$= n - k\cdot n^2$.

Or $k \geq \frac{1}{n}$, donc $n - k\cdot n^2 \leq n - \frac{1}{n}\cdot n^2 = 0$, .
On a donc une matrice $M\in M_n(\mathbb{R})\setminus\{0\}$ tq. $b_k(M,M)\leq 0$, donc b_k n'est pas défini positif, donc ce n'est pas un produit scalaire.

3) Mque b_0 est un produit scalaire

On sait que b_0 est une forme bilinéaire symétrique par 1). On mque b_0 est défini positif. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\setminus\{0\}$ une matrice non nulle.
On a $b_0(A,A) = Tr({}^tAA) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2 \geq 0$, et cette somme est non nulle car au moins l'un des coefficients $a_{i,j}$ est

non nul.

4) On suppose $k < \frac{1}{n}$.

a) Mque $\mathrm{Tr}(A)^2 \leq n \cdot \mathrm{Tr}({}^tAA)$ pour tt. $A \in M_n(\mathbb{R})$.

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux matrices A et I pour b_0 on a :

$$b_0(A,I)^2 \leq b_0(A,A)\, b_0(I,I)$$

i.e. $$\mathrm{Tr}(A)^2 \leq n \cdot \mathrm{Tr}({}^tA.A)$$

avec égalité ssi $A = \lambda \cdot I$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Mque b_k est un produit scalaire :

On sait que b_k est une forme bilinéaire symétrique par 1), il suffit de m.que b_k est défini positif. Soit $A \in M_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

$$b_k(A,A) = \mathrm{Tr}({}^tAA) - k\,\mathrm{Tr}(A)^2 \geq .$$

Deux cas : • Si $\mathrm{Tr}(A)^2 > 0$, on a $-k \cdot \mathrm{Tr}(A)^2 > -\frac{1}{n} \cdot \mathrm{Tr}(A)^2$

$$\Rightarrow \mathrm{Tr}({}^tAA) - k \cdot \mathrm{Tr}(A)^2 > \mathrm{Tr}({}^tAA) - \frac{1}{n} \cdot \mathrm{Tr}(A)^2$$

or $\mathrm{Tr}({}^tAA) - \frac{1}{n} \cdot \mathrm{Tr}(A)^2 \geq 0$ selon 4) a).

• Si $\mathrm{Tr}(A)^2 = 0$, on a $b_k(A,A) = \mathrm{Tr}({}^tA.A) = b_0(A,A) > 0$ selon 3).

Dans les deux cas $b_k(A,A) > 0$, donc b_k est un produit scalaire.

Ex. 2) $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z + t = 0\}$.

1) Donner une b.o.n. de F.

On commence par donner une base de F : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in F$ ssi $y = x + z + t$,

càd, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+z+t \\ z \\ t \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de F car c'est une famille génératrice et une famille libre.

On applique Gram-Schmidt à cette famille pour obtenir une b.o.n.

Ex. 2) 2) Compléter en une b.o.n. de $\mathbb{R}^4$.

F est de dimension 3, donc $F^\perp$ est de dimension 1. Pour compléter une b.o.n. de F en une b.o.n. de $\mathbb{R}^4$ il suffit de lui ajouter un vecteur non nul de $F^\perp$.

On a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in F^\perp$ ssi : $\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$, $\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$ et $\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$

, càd, $\begin{cases} x+y=0 \\ z+y=0 \\ t+y=0 \end{cases}$. Une solution de ce ~~système~~ système est $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in F^\perp$ et on peut le rajouter à la base trouvée en 1) pour avoir une b.o.n. de $\mathbb{R}^4$. ~~pour~~

3) Calculer la distance de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ à F. $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$d_F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - p_F\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| p_{F^\perp}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|.$$

On ~~a~~ une b.o.n. de $F^\perp$ est $e_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$, donc $p_{F^\perp}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \langle u, e_1 \rangle \cdot e_1$

$= \frac{-1}{2} \cdot e_1$, car $\|e_1\| = 1$,

donc $\|p_F(u)\| = \frac{1}{2}$.

Ex. 3 : $u, v \in E$. Mque "$\langle u,v\rangle = 0$" ssi "pour tt. $\alpha \in \mathbb{R}$ on a $\|u\|^2 \leq \|u+\alpha v\|^2$".

[$\Rightarrow$] On suppose $\langle u,v\rangle = 0$. On a $\|u+\alpha v\|^2 = \|u\|^2 + \alpha^2\|v\|^2 + \alpha\langle u,v\rangle$

$= \|u\|^2 + \alpha^2\|v\|^2 \geq \|u\|^2$

Car $\alpha^2\|v\|^2 \geq 0$ pour tt. $\alpha \in \mathbb{R}$.

[$\Leftarrow$] On suppose que pour tt. $\alpha \in \mathbb{R}$ on a $\|u\|^2 \leq \|u+\alpha v\|^2$. Donc pour tt. $\alpha \in \mathbb{R}$,

$\|u\|^2 \leq \|u\|^2 + \alpha^2 \|v\|^2 + \alpha \langle u,v \rangle$

$\Rightarrow 0 \leq \langle u,v\rangle + \alpha \cdot \|v\|^2$ pour tt. $\alpha \neq 0$. Si $v=0$ on a $\langle u,v\rangle = 0$, on peut donc supposer $v \neq 0$, càd. $\|v\|^2 > 0$.

- Si $\langle u,v\rangle > 0$, on pose $\alpha = -2\dfrac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}$, on a $0 \leq \langle u,v\rangle - 2\cdot\dfrac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2} \times \|v\|^2$

$\Rightarrow 0 \leq -\langle u,v\rangle < 0$ contradiction.

- Si $\langle u,v\rangle < 0$, on pose $\alpha = \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}$, on a $0 \leq \langle u,v\rangle + \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2} \times \|v\|^2$

$\Rightarrow 0 \leq 2\cdot\langle u,v\rangle < 0$, contradiction.

Donc $\underline{\langle u,v\rangle = 0}$.

Ex.4 : E espace euclidien, $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$ famille de vecteurs unitaires tq. pour tt. $x \in E$ on ait : $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2$.
$F = \mathrm{Vect}\left((e_i)_{1\leq i\leq n}\right)$.

1) Mque $\mathcal{B}$ est une famille orthogonale.

On mque $\forall i,j \leq n$ tq. $i \neq j$ on a $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ (On sait déjà que $\langle e_i, e_i\rangle = 1$ car les $(e_i)_i$ sont unitaires).

On a $\langle e_i, e_i\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle e_i, e_j\rangle^2$ pour tt. i.

$\Rightarrow 1 = 1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \langle e_i, e_j\rangle^2$ en isolant $\langle e_i, e_i\rangle$ de la somme,

Donc $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \langle e_i, e_j\rangle^2 = 0$, càd $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ pour tt. $i \neq j \leq n$.

2) $x \in E$. $y := x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \cdot e_i$. Mque $y \in F^{\perp}$.

~~...~~ Il suffit de mque $\langle y, e_i\rangle = 0$ pour tt. $i \leq n$.

On a $\langle y, e_i\rangle = \langle x, e_i\rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle \langle e_i, e_j\rangle$ en remplaçant y,

$= \langle x, e_i\rangle - \langle x, e_i\rangle$ car ~~...~~ $(e_i)_{i\leq n}$ est orthonormée

$= \underline{0}$.

3) Mque $F^{\perp} = \{0\}$.

Soit $x \in F^{\perp}$. On a $\langle x, e_i \rangle = 0$ pour $\forall i \leq n$.

or par hypothèse ~~$\langle x, x \rangle^2 =$~~ $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 = 0$.

Donc $\|x\|^2 = 0$, donc $x = 0$.

4) En déduire que $\dim(E) = n$.

On a $E = F \oplus F^{\perp}$ car E est de dimension finie, or $F^{\perp} = \{0\}$, donc $E = F = \mathrm{Vect}\left((e_i)_{1 \leq i \leq n}\right)$ est de dimension n car engendré par une famille ~~de~~ orthonormée de taille n, et ~~q~~ car une famille orthonormée est toujours libre.