

(4)

Ex 1 : $\mathcal{A}$ endo. de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{A}$ est auto-adjoint car la matrice de $\mathcal{A}$ dans une b.o.n. est symétrique.
Selon le th. spectral $\mathcal{A}$ existe P matrice orthogonale, D diag. $\mathbb{R}$.

$$\mathcal{A} = P D P^{-1}.$$

On calcule le polynôme caractéristique de $\mathcal{A}$:

$$\chi_{\mathcal{A}}(X) = (X+3)(X-3)^2.$$

On calcule les espaces propres associés à 3 et -3.

$$E_3 = \text{Ker}(\mathcal{A} - 3I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

$$E_{-3} = \text{Ker}(\mathcal{A} + 3I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ est une b.o.n.}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ non orthogonales, on applique Gram-Schmidt pour trouver une b.o.n. de E_3 .

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2' := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\|e_2'\|^2 = \frac{6}{4}, \quad e_2 := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(2)

Ex 2 : E esp. euclidien de dim. ≥ 3 . (u, v) famille l.b.e. de vect .
de E , $f: E \rightarrow E$ def. par
$$f(x) = \langle u, x \rangle \cdot u - \langle v, x \rangle \cdot v.$$

1) Montrer f auto-adjoint : $x, y \in E$,

$$\begin{aligned} \langle f(x), y \rangle &= \langle \langle u, x \rangle \cdot u - \langle v, x \rangle \cdot v, y \rangle \\ &= \langle u, x \rangle \cdot \langle u, y \rangle - \langle v, x \rangle \langle v, y \rangle \\ &= \langle x, u \rangle \cdot \langle u, y \rangle - \langle x, v \rangle \langle v, y \rangle \\ &= \langle x, \langle u, y \rangle \cdot u - \langle v, y \rangle \cdot v \rangle \\ &= \langle x, f(y) \rangle. \end{aligned}$$

2) Déterminer $\ker(f)$ et $\text{Im}(f) = \text{Vect}(u, v)$.

Clairément $\text{Im}(f) \subseteq \text{Vect}(u, v)$.

On a $\dim(u, v)^\perp = 1$.

Si $x \in \ker(f)$ on a $x \in \ker(f)$ si $\langle u, x \rangle \cdot u - \langle v, x \rangle \cdot v = 0$
si $\begin{cases} \langle u, x \rangle = 0 \\ \langle v, x \rangle = 0 \end{cases}$ car u, v est l.b.e.

si $x \in (u, v)^\perp$, donc $\dim(\ker(f)) = 1$, selon th. du
rang $\dim(\text{Im}(f)) = 2$, donc $\text{Im}(f) = \text{Vect}(u, v)$.

3) On suppose (u, v) orthogonale. Déterminer les v.p. de f et la dim.
des e.p. associés.

On a $\dim(\ker(f)) = 1$ selon 2), donc 0 est v.p. et l'esp. propre associé
est de dim. 1.

$$f(u) = \langle u, u \rangle \cdot u - \langle v, u \rangle \cdot v = u \quad \text{car } \langle u, v \rangle = 0.$$

$$f(v) = \langle u, v \rangle \cdot u - \langle v, v \rangle \cdot v = -v.$$

Donc 1 et -1 sont v.p., chacun ayant son esp. propre de dim 1
car la somme des dimensions des esp. propres est 3.

(3)

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

Ex. 3 : $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique.

1) $A + iI_n$ est-elle inversible dans $M_n(\mathbb{C})$?

A symétrique donc A est diagonalisable avec i et autoadjoint pour le produit scalaire canonique, on a P orthogonal $\mathbb{R}$ et A diagonal et $A = PDP^{-1}$.

$$\Rightarrow P^{-1}AP = D.$$

$$\text{Alors } P^{-1}AP + i \cdot I_n = D + i \cdot I_n$$

$$\Rightarrow P^{-1}(A + i \cdot I_n)P = D + i \cdot I_n.$$

La matrice $D + i \cdot I_n$ est inversible dans $M_n(\mathbb{C})$ car diagonale de coef. diagonaux non nuls, donc

$A + i \cdot I_n = P(D + i \cdot I_n)P^{-1}$ est inversible car produit de matrices inversibles dans $M_n(\mathbb{C})$.

2) en supposant qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tq. $A^p = 0$. Montrer $A = 0$.

Comme précédemment on a P orthogonal $P \in O_n(\mathbb{R})$ tq. et D diagonal tq. $P^{-1}AP = D$.

$$\text{alors } P^{-1}A^pP = D^p$$

$$\Rightarrow 0 = D^p, \text{ or, si } D = \text{diag}(1_1, \dots, 1_n), D^p = \text{diag}(1_1^p, \dots, 1_n^p)$$

donc $1_i^p = 0$ pour tout i ,

donc $1_i = 0$ pour tout i donc $D = 0$, et $P^{-1}AP = 0$

$$\Rightarrow \underline{A = 0}.$$

④

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

Ex. 4 : $E = \mathcal{P}_2[X]$ esp. des pol. de d° ≤ 2. E muni d'un prod. scalaire $\langle P, Q \rangle := \int_0^1 P(u)Q(u) du$.

Calculer le projeté orthogonal de X^2 sur $F = \text{Vect}(1, X)$.

On calcule une b.o.n. de $(1, X)$:

$$\cdot \langle 1, 1 \rangle = 1, \quad e_1 := 1$$

$$\cdot X = \langle X, 1 \rangle \cdot 1 = X - \frac{1}{2} \cdot 1.$$

$$\langle X - \frac{1}{2}, X - \frac{1}{2} \rangle = \int_0^1 X^2 - X + \frac{1}{4} du = \frac{1}{12}.$$

$$\text{Donc } e_2 := \frac{1}{\sqrt{12}} \left(X - \frac{1}{2} \right).$$

$$\text{Alors } p_F(X^2) = \langle X^2, 1 \rangle \cdot 1 + \langle X^2, \frac{1}{\sqrt{12}} \left(X - \frac{1}{2} \right) \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{12}} \left(X - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{12}{\sqrt{12}} \cdot \langle X^2, X - \frac{1}{2} \rangle \left(X - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{3} + 12 \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \left(X - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{3} + 12 \times \left(\frac{1}{12} \right) \left(X - \frac{1}{2} \right) = X - \frac{1}{6}.$$