

Licence de mathématiques

L2, Algèbre 4

examen final

jeudi 16 mai 2024

durée 2H

*Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones, ni ordinateurs ne sont autorisés.***Exercice 1**

Si $a, b \in \mathbb{R}$, on pose $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

- a) Justifier que la matrice $M_{a,b}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

La matrice $M_{a,b}$ est symétrique réelle donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

- b) Trouver $P \in O_3(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $M_{1,1} = PDP^{-1}$.

Soit $M = M_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice M est de rang 1 donc 0 est valeur propre et $\dim \ker M = 2$. Il existe donc une seule autre valeur propre λ telle que $\text{Tr} M = \lambda + 0 + 0 = 3 \Rightarrow \lambda = 3$. On cherche une base orthonormée de vecteurs propres.

Soit $v = {}^t(x, y, z)$. Pour la valeur propre 3 :

$$Mv = 3v \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 3x \\ x + y + z = 3y \\ x + y + z = 3z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y = z$$

Donc $v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} {}^t(1, 1, 1)$ est une base orthonormée de $\ker(M - 3I_3)$.

Pour la valeur propre 0 :

$$Mv = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 0 \Leftrightarrow x = -y - z .$$

donc $v_2 = {}^t(-1, 1, 0)$, $v_3 = {}^t(-1, 0, 1)$ forment une base de $\ker M$. On rend cette base orthogonale en utilisant la méthode de Gram-Schmidt. On pose $v'_2 = v_2$ et

$$\begin{aligned} v'_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 = {}^t(-1, 0, 1) - \frac{1}{2} {}^t(-1, 1, 0) \\ &= {}^t\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) . \end{aligned}$$

On « normalise ». Soient $v_2'' = \frac{v_2'}{\|v_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}t(-1, 1, 0)$ et $v_3'' = \frac{v_3'}{\|v_3'\|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}t(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$.
La famille (v_1, v_2'', v_3'') est une base orthonormée de vecteurs propres de M donc

$$M = PDP^{-1}$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

une matrice orthogonale et une matrice diagonale.

- c) Déterminer tous les $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que la matrice $M_{a,b} \in O_3(\mathbb{R})$.

La matrice $M_{a,b}$ est orthogonale si et seulement si ses lignes sont orthogonales et de norme 1 pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2b^2 = 1 \text{ et } 2ab + b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2b^2 = 1 \text{ et } b(2a + b) = 0$$

$$\Leftrightarrow b = 0, a = \pm 1 \text{ ou } b = -2a, 9a^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (a, b) = \pm(0, 1), \text{ ou } \pm\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

- d) On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Justifier que u est une rotation de $\mathbb{R}^3$ puis déterminer son axe et son angle.

Soit $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Les lignes sont de norme au carré : $\frac{1}{3^2}(2^2 + 2^2 + 1) = 1$
et orthogonales car

$$2.1 - 2.2 + (-1).(-2) = 1.2 + 2.1 - 2.2 + 2.2 - 2.1 - 1.2 = 0.$$

Le déterminant est : $\frac{1}{27}(2^3 - 1 + 2^3 + 2^2 + 2^2 + 2^2) = 1$. Donc u est bien une rotation.

On a $A - {}^tA = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc on peut prendre pour axe $\mathbb{R}\vec{k}$ où $\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$ et pour angle θ tel que $\cos \theta = \frac{\text{Tr}A-1}{2} = \frac{1}{2}$ et $\sin \theta \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{A-{}^tA}{2} \Rightarrow \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $\theta = -\frac{\pi}{3} \bmod 2\pi$.

Exercice 2

- a) **Questions de cours.** Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $F \leq E$ un sous-espace vectoriel.
- Rappeler la définition du projeté orthogonal p_F de E sur F . **Le projeté orthogonal p_F est la projection de E sur F relativement à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$.**
 - Soit $y \in E$. Si $(f_1, \dots, f_n)$ est une base orthonormée de F , exprimer $p_F(y)$ en fonction des f_i et des coefficients $\langle y, f_i \rangle$. **On a $p_F(y) = \sum_{i=1}^n \langle y, f_i \rangle f_i$.**
 - On note $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Exprimer

$$\inf_{f \in F} \|y - f\|^2$$

avec y et $p_F(y)$.

$$= \|y - p_F(y)\|^2.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes réels de degrés $\leq n$. Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx.$$

- b) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
C'est clairement bilinéaire symétrique et si $P \neq 0$, alors $\langle P, P \rangle = \int_0^1 P^2(x)dx > 0$ car $x \mapsto P^2(x)$ est continue, positive non identiquement nulle sur l'intervalle $[0, 1]$. Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
- c) Trouver une base orthonormée de $F = \text{Vect}(X, X^2)$ pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
On utilise la méthode de Gram-Schmidt. Soit $v_1 = X$. Soit

$$v_2 = X^2 - \frac{\langle X, X^2 \rangle}{\langle X, X \rangle} X$$

$$= X^2 - \frac{\int_0^1 x^3 dx}{\int_0^1 x^2 dx} X = X^2 - \frac{3}{4} X .$$

On « normalise ». Soient

$$v'_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \frac{X}{\sqrt{\int_0^1 x^2 dx}} = \sqrt{3}X$$

et

$$\begin{aligned} v'_2 &= \frac{v_2}{||v_2||} = \frac{X^2 - \frac{3}{4}X}{\sqrt{\int_0^1 (x^2 - \frac{3}{4}x)^2 dx}} \\ &= \frac{X^2 - \frac{3}{4}X}{\sqrt{\int_0^1 (x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{16}x^2) dx}} \\ &= \frac{X^2 - \frac{3}{4}X}{\sqrt{\frac{1}{5} - \frac{3}{8} + \frac{3}{16}}} \\ &= 4\sqrt{5}X^2 - 3\sqrt{5}X . \end{aligned}$$

La famille

$$(\sqrt{3}X, 4\sqrt{5}X^2 - 3\sqrt{5}X)$$

est une base orthonormée de $F = \text{Vect}\{X, X^2\}$.

- d) Dans le cas où $E = \mathbb{R}_2[X]$ déterminer $p_F(1)$ le projeté orthogonal de 1 sur F (pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$) et en déduire $\inf_{a_1, a_2 \in \mathbb{R}} \int_0^1 (1 + a_1x + a_2x^2)^2 dx$.

On a :

$$\begin{aligned} p_F(1) &= \langle 1, \sqrt{3}X \rangle \sqrt{3}X + \langle 1, 4\sqrt{5}X^2 - 3\sqrt{5}X \rangle (4\sqrt{5}X^2 - 3\sqrt{5}X) \\ &= \frac{3}{2}X - \frac{\sqrt{5}}{6}(4\sqrt{5}X^2 - 3\sqrt{5}X) \\ &= -\frac{10}{3}X^2 + 4X . \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \inf_{a_1, a_2 \in \mathbb{R}} \int_0^1 (1 + a_1x + a_2x^2)^2 dx &= \inf_{f \in F} ||1 - f||^2 = ||1 - p_F(1)||^2 \\ &= \int_0^1 (1 - 4x + \frac{10}{3}x^2)^2 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + 16 \int_0^1 x^2 dx + \frac{10^2}{3^2} \int_0^1 x^4 dx - 8 \int_0^1 x dx + \frac{20}{3} \int_0^1 x^2 dx - \frac{80}{3} \int_0^1 x^3 dx \\
&= 1 + \frac{16}{3} + \frac{20}{9} - 4 + \frac{20}{9} - \frac{20}{3} \\
&= \frac{1}{9} .
\end{aligned}$$

Exercice 3

Soit $\mathcal{S} = \{S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : {}^t S = S\}$. Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(AB)$. On note aussi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{S}$.

C'est bilinéaire et $\forall A, B, \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$. De plus si $0 \neq A \in \mathcal{S}$, alors $\text{Tr} A^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq 2} A_{ij} A_{ji} = \sum_{1 \leq i, j \leq 2} A_{ij}^2$ car A est symétrique donc $\text{Tr} A^2 > 0$ car un des coefficients $A_{ij} > 0$.

b) Dans $\mathcal{S}$, déterminer une base de l'orthogonal $\text{Vect}\{I_2\}^\perp$ pour ce produit scalaire.

Soit $A \in \mathcal{S}$. On a $A \in \text{Vect}\{I_2\}^\perp \Leftrightarrow \text{Tr}(AI_2) = \text{Tr} A = 0$. Donc $\text{Vect}\{I_2\}^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Voici une base $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

c) Soit $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $\forall S \in \mathcal{S}, {}^t P S P \in \mathcal{S}$ et déterminer l'adjoint de l'endomorphisme

$$\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}, S \mapsto {}^t P S P$$

pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

On a $\forall S \in \mathcal{S}, {}^t({}^t P S P) = {}^t P {}^t S {}^t P = {}^t P S P$. Posons $h_P(S) = {}^t P S P$. On a $\forall S, T \in \mathcal{S}, \langle S, h_P(T) \rangle = \text{Tr}(S {}^t P T P) = \text{Tr}(P S {}^t P T) = \langle P S {}^t P, T \rangle$. Donc l'adjoint est l'endomorphisme h_P est $h_P^* = h_{{}^t P}$:

$$\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}, S \mapsto P S {}^t P .$$

d) L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est-elle aussi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Justifier votre réponse.

Non, car par exemple $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ et $\langle N, N \rangle = \text{Tr} N^2 = \text{Tr} 0 = 0$.

Exercice 4

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, f(x, y, z) = (2z + 1, 2x - 2y + 2z, 2x) .$$

a) Montrer que f est une application affine.

On a $f(x, y, z) = \vec{f}(x, y, z) + (1, 0, 0)$ où

$$\vec{f}(x, y, z) = (2z, 2x - 2y + 2z, 2x)$$

est linéaire. F Donc f est affine.

b) Montrer que $f \circ f$ est une homothétie et trouver $A \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall M \in \mathbb{R}^3, f(f(M)) = A + \lambda \overrightarrow{AM} .$$

Posons $h(x, y, z) = f(f(x, y, z))$. On a :

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in \mathbb{R}, h(x, y, z) &= f \circ f(x, y, z) \\ &= (2(2x) + 1, 2(2z + 1) - 2(2x - 2y + 2z) + 2(2x), 2(2z + 1)) \\ &= (4x + 1, 4y + 2, 4z + 1) \\ &= 4(x, y, z) + (1, 2, 1) . \end{aligned}$$

C'est donc une homothétie de rapport 4. On trouve le point fixe :

$$\begin{aligned} h(x, y, z) &= (x, y, z) \Leftrightarrow (4x + 1, 4y + 2, 4z + 1) = (x, y, z) \\ \Leftrightarrow 4x + 1 &= x, 4y + 2 = y, 4z + 1 = z \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}, y = -\frac{2}{3}, z = -\frac{1}{3} . \end{aligned}$$

Posons $A = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. On a

$$\begin{aligned} \forall M \in \mathbb{R}^3, h(M) - A &= h(M) - h(A) = 4(x, y, z) - 4A = 4\overrightarrow{AM} \\ h(M) &= A + 4\overrightarrow{AM} . \end{aligned}$$