Université Claude Bernard - Lyon 1 | Semestre de printemps 2023-2024

Algèbre IV | Durée : 1h30

Contrôle continu 2

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. On considère u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que u est auto-adjoint pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$. Justifier l'existence, puis expliciter une matrice P orthogonale et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 2. Soit E un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 3. Soit (u, v) une famille libre de vecteurs de E et f l'endomorphisme de E défini par

$$f(x) = \langle u, x\rangle u - \langle v, x\rangle v.$$

1. Démontrer que f est auto-adjoint.
2. Déterminer $\ker(f)$ et montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(u, v)$.
3. Dans cette question on suppose que (u, v) est une famille orthonormale. Déterminer les valeurs propres de f ainsi que la dimension des sous-espaces propres associés.

Exercice 3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Les questions suivantes sont indépendantes.

1. La matrice $A + iI_n$ est-elle inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? (où $i \in \mathbb{C}$ vérifie $i^2 = -1$)
2. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$. Montrer que $A = 0$.

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On munit E du produit scalaire défini pour tout $(P, Q) \in E^2$ par

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)\mathrm{d}x.$$

Calculer le projeté orthogonal de X^2 sur $F = \mathrm{vect}(1, X)$.