Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2023-2024

Algèbre IV Durée : 1h30

Contrôle continu 1

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \mathbb{R}$, A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$b_k(A, B) = \mathrm{T}r({}^tAB) - k\mathrm{T}rA\,\mathrm{T}rB.$$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{R}$, l'application b_k est une forme bilinéaire symétrique sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Dans cette question, on suppose $k \geq \frac{1}{n}$. Montrer que la forme b_k n'est pas un produit scalaire. [*On pourra calculer $b_k(I, I)$ où I est la matrice identité.*]
3. Montrer que b_0 est un produit scalaire.
4. Dans cette question, on suppose $k < \frac{1}{n}$.
   (a) À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a
   $$(\mathrm{T}rA)^2 \leq n\mathrm{T}r({}^tAA).$$
   (b) En déduire que b_k est un produit scalaire.

Exercice 2. On munit $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. On considère $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z + t = 0\}$.

1. Donner une base orthonormée du sous-espace F.
2. Compléter cette base en une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$.
3. Calculer la distance de $(1, 1, 1, 1)$ au sous-espace F.

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini muni d'un produit scalaire $<,>$. Pour tout $u, v \in E$, montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

1. $< u, v >= 0$.
2. $||u||^2 \leq ||u + \alpha v||^2$ pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$.

Exercice 4. Soit E un espace euclidien et n un entier naturel non nul.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires telle que pour tout $x \in E$ on ait :

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i >^2 .$$

On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\mathcal{B}$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}$ est orthogonale.

2. Soit x un vecteur de E. On pose :

$$y = x - \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i.$$

   Montrer que $y \in F^{\perp}$.

3. Montrer que $F^{\perp} = \{0\}$.

4. Déduire des questions précédentes que la dimension de E est n.