Licence de mathématiques
L2, Algèbre 4
examen final
jeudi 16 mai 2024
durée 2H

Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones, ni ordinateurs ne sont autorisés.

7

Exercice 1 Si $a, b \in \mathbb{R}$, on pose $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

1 a) Justifier que la matrice $M_{a,b}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

3 b) Trouver $P \in O_3(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $M_{1,1} = PDP^{-1}$.

1 c) Déterminer tous les $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que la matrice $M_{a,b} \in O_3(\mathbb{R})$.

2 d) On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Justifier que u est une rotation de $\mathbb{R}^3$ puis déterminer son axe et son angle.

9

Exercice 2 a) **Questions de cours.** Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace eulidien et $F \leqslant E$ un sous-espace vectoriel.

3
- Rappeler la définition du projeté orthogonal p_F de E sur F.
- Soit $y \in E$. Si $(f_1, ..., f_n)$ est une base orthonormée de F, exprimer $p_F(y)$ en fonction des f_i et des coefficients $\langle y, f_i \rangle$.
- On note $|| \cdot ||$ la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Exprimer

$$\inf_{f \in F} ||y - f||^2$$

avec y et $p_F(y)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes réels de degrés $\leqslant n$. Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx \ .$$

1 b) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2 c) En utilisant le procédé de Gram-Schmidt, trouver une base orthonormée de $F = \mathrm{Vect}(X, X^2)$ pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

3 d) En déduire $\inf_{a_1, a_2 \in \mathbb{R}} \int_0^1 (1 + a_1 x + a_2 x^2)^2 dx$.

5 **Exercice 3** Soit $\mathscr{S} = \{S \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \ : \ {}^tS = S\}$. Pour tous $A, B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on note $\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(AB)$. On note aussi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1 a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{S}$.

1 b) Dans $\mathscr{S}$, déterminer une base l'orthogonal $\mathrm{Vect}\{I_2\}^\perp$ pour ce produit scalaire.

2 c) Soit $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $\forall S \in \mathscr{S}$, ${}^tPSP \in \mathscr{S}$ et déterminer l'adjoint de l'endomorphisme

$$\mathscr{S} \to \mathscr{S}, \ S \mapsto {}^tPSP$$

pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1 d) L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est-elle aussi un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$? *Justifier votre réponse.*

4 **Exercice 4** Soit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^3, \ f(x, y, z) = (2z + 1, 2x - 2y + 2z, 2x) \ .$$

1 a) Montrer que f est une application affine.

3 b) Montrer que $f \circ f$ est une homothétie et trouver $A \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall M \in \mathbb{R}^3, \ f(f(M)) = A + \lambda \overrightarrow{AM} \ .$$