

Cours d'algèbre bilinéaire

I Formes bilinéaires

I.0 Produit scalaire usuel

C'est l'application $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$ où si $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.

Proposition.

- i) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto x \cdot y$ est linéaire.
- ii) $\forall y \in \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x \cdot y$ est linéaire.
- iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, x \cdot y = y \cdot x$.
- iv) $\forall 0 \neq x \in \mathbb{R}^n, x \cdot x > 0$.

Notation. Si $x \in \mathbb{R}^n$, soit $\|x\|_2 = \sqrt{x \cdot x}$.

Théorème de Cauchy-Schwarz. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, |x \cdot y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$.

Démo. $\forall a, b \in \mathbb{R}, |ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.

I.1 Formes bilinéaires

Définitions. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

- Une forme *bilinéaire* sur E est une application $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que
 - $\forall x \in E, b(x, \cdot) : E \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire ;
 - $\forall y \in E, b(\cdot, y) : E \rightarrow \mathbb{R}$ aussi.
- On dit que b est *symétrique* si $\forall x, y \in E, b(x, y) = b(y, x)$. On dit que b est *antisymétrique* si $\forall x, y \in E, b(x, y) = -b(y, x)$.

Notations. Soient $BL(E)$, *resp.* $BLS(E)$, *resp.* $BLA(E)$, l'ensemble des formes bilinéaires sur E , *resp.* des formes bilinéaires symétriques, *resp.* l'ensemble des formes bilinéaires antisymétriques.

Exercices.

- 1) L'ensemble $BL(E)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel pour les lois ordinaires et $BL(E) = BLS(E) \oplus BLA(E)$.
- 2) *Polarisation.*
 - i) Soit $b \in BLS(E)$. Alors $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, b(x, y) = \frac{1}{2}(b(x + y, x + y) - b(x, x) - b(y, y))$.

ii) Soit $b \in BL(E)$. Alors b antisymétrique $\Leftrightarrow b$ alternée[†].

Exemples.

- a) Les applications suivantes sont bilinéaires symétriques.
- $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, (x, y) \mapsto x \cdot y$;
 - $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, (A, B) \mapsto \text{Tr} AB$;
 - $l_2(\mathbb{N}) \times l_2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}, ((a_n), (b_n)) \mapsto \sum_{n \geq 0} a_n b_n$;
 - $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, (A, B) \mapsto \det(A + B) - \det A - \det B$;
 - $\mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, (f, g) \mapsto \int_{-1}^1 fg$.
- b) L'application $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 y_2 - x_2 y_1$ est bilinéaire antisymétrique.
- c) L'application $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 y_2$ est bilinéaire mais ni symétrique ni antisymétrique.

I.2 Matrices

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'application

$$\varphi_A : \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, (X, Y) \mapsto {}^t X A Y$$

est bilinéaire.

Exercice. L'application φ_A est symétrique $\Leftrightarrow$ la matrice A est symétrique. L'application φ_A est antisymétrique $\Leftrightarrow$ la matrice A est antisymétrique.

Notations. Soient $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : {}^t A = A\}$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : {}^t A = -A\}$.

Définition. Matrice d'une forme bilinéaire. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E . Si $\varphi \in BL(E)$, on pose $[\varphi]_{\mathcal{B}} = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$.

Proposition. Avec les notations de la définition.

$$\forall x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, \forall y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n, \varphi(x, y) = {}^t X A Y$$

où $A = [\varphi]_{\mathcal{B}}$, $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$, $Y = {}^t(y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$.

On en déduit le

Théorème. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n , de base $\mathcal{B}$. Alors l'application $\varphi \mapsto [\varphi]_{\mathcal{B}}$ définit des isomorphismes d'espaces vectoriels :

$$BL(E) \simeq \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

[†]. c-à-d $\forall x \in E, b(x, x) = 0$.

$$BLS(E) \simeq \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

$$BLA(E) \simeq \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) .$$

Exemple. Soit $E = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Soit $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$. Soit $\mathcal{B}' = (1, x, 2x^2 - 1)$. Soit $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}, (f, g) \mapsto \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi f(\cos t)g(\cos t)dt$. Alors

$$[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \pi & 0 & \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} & 0 \\ \frac{\pi}{2} & 0 & \frac{3\pi}{8} \end{pmatrix}, [\varphi]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} .$$

I.3 Formules de changement de bases et congruence des matrices

Proposition. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n . Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E . Soit $\varphi \in BL(E)$. Si $A = [\varphi]_{\mathcal{B}}, A' = [\varphi]_{\mathcal{B}'}, P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^\dagger$, alors

$$A' = {}^t P A P .$$

Définition. On dit que $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont congruentes si $A' = {}^t P A P$ pour une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible.

Théorème. Classes de congruences des matrices symétriques et anti-symétriques réelles.

i) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe des entiers $r, s \geq 0$ et une matrice inversible $P \in$

†. c-à-d si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n), \mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$, alors $P = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ où $\forall 1 \leq j \leq n, e'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i$; c'est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

matrice diagonale avec r « 1 » et s « -1 ». De plus, $r + s = \text{rg}A$.

- ii) Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Alors $\text{rg}A = 2d$ est pair et il existe une matrice inversible P telle que

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} J & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

matrice diagonale par blocs avec d blocs $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de taille 2×2 .

Démo. Plus tard dans le cours.

I.4 Noyau et rang d'une forme bilinéaire symétrique

Définitions. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Soit $\varphi \in BLS(E) \cup BLA(E)$.

- Le *noyau* de φ est $\ker \varphi = \{x \in E : \forall y \in E, \varphi(x, y) = 0\}$.
- Le *rang* de φ , noté $\text{rg}\varphi$, est la dimension de l'image de l'application linéaire $\gamma_\varphi : E \rightarrow E^*, x \mapsto \varphi(x, \cdot)^\dagger$.

[†]. On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

— On dit que φ est *non dégénérée* si $\ker \varphi = 0$.

Remarque. Si E est un $\mathbb{R}$ –espace vectoriel de dimension n et de base $\mathcal{B}$, si on note $\mathcal{B}^*$ la base duale de E^* , alors $[\varphi]_{\mathcal{B}} = [\gamma_{\varphi}]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}^*} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Théorème du rang pour les formes bilinéaires symétriques et antisymétriques. Soit E un $\mathbb{R}$ –espace vectoriel de dimension n . Soit $\varphi \in BLS(E) \cup BLA(E)$. Alors :

$$n = \dim \ker \varphi + \operatorname{rg} \varphi .$$

I.5 Produits scalaires

Définitions. Soit $\varphi \in BLS(E)$.

— On dit que φ est *positive* si $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$.

— On dit que φ est *définie positive* si $\forall 0 \neq x \in E, \varphi(x, x) > 0$.

Un *produit scalaire* sur E est une forme bilinéaire symétrique et définie positive $\varphi \in BL(E)$.

Exemple. Le produit scalaire usuel est un produit scalaire.

Exercices.

- 1) $(A, B) \mapsto \operatorname{Tr}(AB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- 2) $(A, B) \mapsto -\operatorname{Tr}(AB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

I.6 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$ –espace vectoriel E .

Notation. pour tout $x \in E$, soit $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Théorème. Soient $x, y \in E$.

- i) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$;
- ii) Si $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$, alors x, y sont liés.

Démo. Lemme. Si $A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, alors A est diagonalisable.

Corollaire. L'application $E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto \|x\|$ est une norme.

Exercice. Identité du parallélogramme. $\forall x, y \in E, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

I.7 Produit scalaire hermitien

Soit E un $\mathbb{C}$ –espace vectoriel.

Définitions.

a) On dit que l'application $E \times E \rightarrow \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ est une *forme sesquilinéaire* si

- (i) $\forall x \in E, E \rightarrow \mathbb{C}, y \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire ;
- (ii) $\forall y \in E, E \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto \langle x, y \rangle$ est *antilinéaire*[†] ;

b) on dit que c'est une forme sesquilinéaire hermitienne si de plus

$$(iii) \forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} ;$$

c) on dit que c'est un produit scalaire hermitien si de plus

$$(iv) \forall x \in E, \langle x, x \rangle > 0 .$$

Exemples.

- a) $(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i$ est une forme hermitienne sur $\mathbb{C}^n$.
- b) $(f, g) \mapsto \int_{-1}^1 \overline{f} g$ est une forme hermitienne sur $\mathbb{C}[X]$.

Exercices.

- 1) Notons $\langle x, y \rangle = \alpha(x, y) + i\beta(x, y)$ avec $\alpha(x, y), \beta(x, y) \in \mathbb{R}$ pour tous $x, y \in E$. Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme sesquilinéaire hermitienne $\Leftrightarrow \alpha$ est bilinéaire symétrique et β est bilinéaire antisymétrique.
- 2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Vérifier que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$, $(X, Y) \mapsto {}^t X A Y$ est une forme sesquilinéaire hermitienne $\Leftrightarrow {}^t \overline{A} = A$.

II Espaces euclidiens

Définitions.

- Un espace *préhilbertien* est un couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ où E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E .
- Un espace *euclidien* est un couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ où E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E .

Exemple. $\mathbb{R}^n$ avec le produit scalaire usuel.

[†]. c-à-d $\forall x, x' \in E, \langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle, \forall x \in E, \forall t \in \mathbb{C}, \langle tx, y \rangle = \overline{t} \langle x, y \rangle$.

II.1 Bases orthogonales

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Définitions.

- On dit que $x, y \in E$ sont *orthogonaux* si $\langle x, y \rangle = 0$.
- Une base *orthogonale* de E est une base $(e_1, \dots, e_n)$ telle que $\forall i \neq j, \langle e_i, e_j \rangle = 0$.
- Une base *orthonormale* ou *orthonormée* de E est une base $(e_1, \dots, e_n)$ telle que $\forall i \neq j, \langle e_i, e_j \rangle = 0, \forall i, \langle e_i, e_i \rangle = 1$.

Théorème. Si E est un espace euclidien, alors E admet une base orthogonale. En particulier E admet une base orthonormale.

Exercices.

- (Théorème de Pythagore) Soient $x, y \in E$. Montrer que $\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
- Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E telle que $\forall i \neq j, \langle e_i, e_j \rangle = 0$. Vérifier que les e_i sont linéairement indépendants.
- Trouver une base orthonormale pour $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ avec le produit scalaire usuel.

II.2 Procédé de Gram-Schmidt

Théorème. Soit E un espace euclidien de base $(e_1, \dots, e_n)$. Il existe une unique base $(f_1, \dots, f_n)$ de E telle que

- $\forall 1 \leq i \leq n, f_i = e_i \bmod \langle e_1, \dots, e_{i-1} \rangle$;
- la base $(f_1, \dots, f_n)$ est orthogonale.

Démo. On définit par récurrence :

$$f_1 = e_1, \forall i > 1, f_i = e_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle e_i, f_k \rangle}{\langle f_k, f_k \rangle} f_k .$$

Remarques. En particulier, la base $(\frac{f_1}{\|f_1\|}, \dots, \frac{f_n}{\|f_n\|})$ est orthonormale.

Exercices.

- Si $e_1, \dots, e_n$ est une base orthonormale de E , alors $\forall x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \in E, \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.

- b) Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la base $(e_0, e_1, e_2, e_3, e_4) = (1, X, X^2, X^3, X^4)$ de $\mathbb{R}[X]_{\leq 4}$ avec le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^\pi f(\cos x)g(\cos(x))dx$.

$$\begin{aligned} f_0 &= e_0 = 1, f_1 = e_1 - \frac{\langle e_1, f_0 \rangle}{\langle f_0, f_0 \rangle} f_0 = X - \frac{\int_0^\pi \cos x dx}{\int_0^\pi dx} 1 = X, f_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, f_0 \rangle}{\langle f_0, f_0 \rangle} f_0 - \frac{\langle e_2, f_1 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} f_1 - \\ &= X^2 - \frac{\int_0^\pi \cos^3 x dx}{\int_0^\pi \cos^2 x dx} X - \frac{\int_0^\pi \cos^2 x dx}{\int_0^\pi dx} 1 = X^2 - \frac{1}{2}, f_3 = e_3 - \frac{\langle e_3, f_0 \rangle}{\langle f_0, f_0 \rangle} f_0 - \frac{\langle e_3, f_1 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} f_1 - \\ &= X^3 - \frac{\int_0^\pi \cos^3 x (\cos^2 x - \frac{1}{2}) dx}{\int_0^\pi (\cos^2 x - \frac{1}{2})^2 dx} (X^2 - \frac{1}{2}) - \frac{\int_0^\pi \cos^4 x dx}{\int_0^\pi \cos^2 x dx} X - \frac{\int_0^\pi \cos^3 x dx}{\int_0^\pi dx} 1 = X^3 - \frac{3}{4} X, \end{aligned}$$

- c) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la forme bilinéaire symétrique associée φ_A est un produit scalaire $\Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq n, \Delta_i(A) = \det(A_{\alpha\beta})_{1 \leq \alpha, \beta \leq i} > 0$. *Indication.* Soit $A_i = (A_{\alpha\beta})_{1 \leq \alpha, \beta \leq i}$. Noter $b = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Appliquer le procédé de Gram-Schmidt aux vecteurs $e_1, \dots, e_n$ et obtenir une base $b' = (f_1, \dots, f_n)$ orthogonale pour φ_A . Alors $A_i = [\varphi_A]_{(e_1, \dots, e_i)} = {}^t P_i D_i P_i$ où P_i est la matrice de passage de la base $(f_1, \dots, f_i)$ dans la base $(e_1, \dots, e_i)$ qui est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale et D_i est la matrice de φ_A dans la base $(f_1, \dots, f_i)$ qui est diagonale car la base $(f_1, \dots)$ est orthogonale. Donc $\forall i, \varphi_A(f_1, f_1) \dots \varphi_A(f_i, f_i) = \det D_i = \Delta_i(A) \dots$

Exemple. La matrice symétrique $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ définit un produit

scalaire car $\Delta_1(A) = 2, \Delta_2(A) = 3, \Delta_3(A) = 4, \Delta_4(A) = 5 > 0$.

II.3 Sous-espaces orthogonaux

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Notation. Soit $X \subseteq E$. On pose $X^\perp = \{y \in E : \forall x \in X, \langle x, y \rangle = 0\}$.

C'est l'orthogonal de X .

Proposition

- i) $X^\perp = \text{Vect}(X)^\perp$ est un sous-espace de E ;
- ii) $0^\perp = E, E^\perp = 0$,
- iii) $\forall F \leq E, F \leq F^{\perp\perp}, F^\perp = F^{\perp\perp\perp}, F + F^\perp = F \oplus F^\perp$,
- iv) $\forall F, G \leq E, (F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp, F^\perp + G^\perp \leq (F \cap G)^\perp$.
- v) si F est de dimension finie, alors $E = F \oplus F^\perp$ et si E est de dimension finie, alors $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$;
- vi) Si E est de dimension finie, alors $\forall F \leq E, F = F^{\perp\perp}, \forall F, G \leq E, F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

II.4 Projections orthogonales

Soit $E, \langle \cdot, \cdot \rangle$ un espace euclidien.

II.4.1 Définition

Soit $F \leq E$. Soit $x \in E$. Soient $x_1 \in F, x_2 \in F^\perp$ tels que $x = x_1 + x_2$. On pose $p_F(x) = x_1$. C'est la *projection orthogonale de x sur F* .

Remarque. Soient $x, y \in E$. Alors $y = p_F(x) \Leftrightarrow y \in F$ et $x - y \in F^\perp$.

Exercice. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors p est une projection orthogonale $\Leftrightarrow p^2 = p$ et $\ker p \perp \text{Im } p$.

II.4.2 Formule

Si $f_1, \dots, f_k$ est une base orthonormale de F , alors $p_F(x) = \langle x, f_1 \rangle f_1 + \dots + \langle x, f_k \rangle f_k$.

II.4.3 Distance à un sous-espace

Soit $x \in E$, alors $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\| = \|x - p_F(x)\|$.

II.5 Matrices de Gram

Définition. Soient $e_1, \dots, e_n \in E$. On note $G(e_1, \dots, e_n) = (\langle e_i, e_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition.

- La matrice $G(e_1, \dots, e_n)$ est symétrique positive.
- La matrice $G(e_1, \dots, e_n)$ est inversible $\Leftrightarrow$ symétrique définie positive $\Leftrightarrow e_1, \dots, e_n$ sont $\mathbb{R}$ –linéairement indépendants.
- Pour tout $x \in E$, $d(x, F) = \sqrt{\frac{\det G(x, f_1, \dots, f_n)}{\det G(f_1, \dots, f_n)}}$ pour toute base quelconque $(f_1, \dots, f_n)$ de F .

Exercices.

1. Calculer $\inf_{a, b, c \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 dx$.
2. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$, on pose $P(a_1, \dots, a_n) = \{t_1 a_1 + \dots + t_n a_n : 0 \leq t_1, \dots, t_n \leq 1\}$. Vérifier par récurrence sur n que

$$\text{vol}(P(a_1, \dots, a_n)) = \int_{x \in P(a_1, \dots, a_n)} dx_1 \dots dx_n = \sqrt{\det G(a_1, \dots, a_n)}.$$

Exercice. Soit E un espace euclidien avec une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ de matrice P dans la base $\mathcal{B}$. Vérifier que p est une projection orthogonale $\Leftrightarrow P^2 = P$ et ${}^t P = P$.

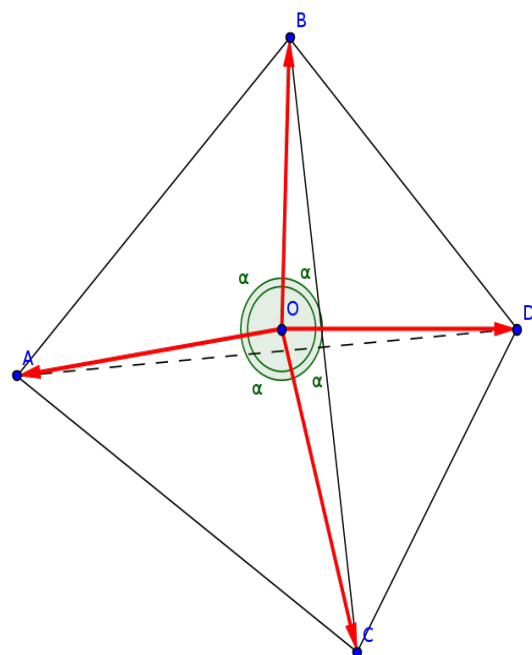
II.6 Angles entre vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Définition. Soient $0 \neq x, y \in \mathbb{R}^n$. L'angle entre x, y est le réel $0 \leq \widehat{xy} \leq \pi$ tel que

$$\cos \widehat{xy} = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}.$$

Exemple. $x \perp y \Leftrightarrow \widehat{xy} = \frac{\pi}{2}$; x, y colinéaires $\Leftrightarrow \widehat{xy} = \pm \pi$.

Exercice. Soit un tétraèdre régulier dans $\mathbb{R}^3$. L'angle entre les vecteurs issus du centre et pointés vers les sommets est $-\text{Arccos} \frac{1}{3} = \pi - \text{Arctan}(2\sqrt{2})$.

FIGURE 1 – $\alpha = -\text{Arccos}\frac{1}{3}$

Proposition. (Matrice d’une projection orthogonale.) Soit p_F la projection orthogonale sur F . Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E , alors

$$[p_F]_{\mathcal{B}} = B({}^t B B)^{-1} B$$

où $B = (\langle e_i, f_j \rangle)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k}} \in \mathcal{M}_{nk}$ est la matrice d’une base $(f_1, \dots, f_k)$ quelconque de F dans la base $\mathcal{B}$.

Démo. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $[f]_{\mathcal{B}} = B({}^t B B)^{-1} B$. Soient $x \in E, y \in F$. Alors il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}), Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k1}(\mathbb{R})$ tels que $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, y = y_1 f_1 + \dots + y_k f_k$.

Alors

$$\begin{aligned} \langle x - f(x), y \rangle &= {}^t (X - B({}^t B B)^{-1} B X) B Y \\ &= {}^t X B Y - {}^t X B \underbrace{({}^t B B)^{-1} B B}_{=I_k} Y \\ &= {}^t X B Y - {}^t X B Y = 0. \end{aligned}$$

C’est vrai pour tout $y \in F$ donc $x - f(x) \in F^\perp \Rightarrow f(x) = p_F(x)$. **Q.e.d.**

Exemple. Si $E = \mathbb{R}^n$, si d est une droite, alors $p_d = \frac{v^t v}{v^t v}$ où $v \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ est le vecteur des coordonnées d’un vecteur directeur de d .

III Matrices orthogonales

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Définition. Sont équivalentes.

- i) $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$.
- ii) f envoie toute base orthonormale sur une base orthonormale.
- iii) f envoie une base orthonormale sur une base orthonormale.

On dit que f est une *transformation orthogonale* si une de ces assertions est vraie.

Notation. $O(E)$ = l’ensemble des transformations orthogonales de E .

Exercices.

- 1) $O(E) \leq \text{GL}(E)$ est un sous-groupe.

- 2) Si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $f \in O(E) \Leftrightarrow [f]_{\mathcal{B}} \in O_n(\mathbb{R})$ pour toute base orthonormale $\mathcal{B}$ de E .

Définition. Soit $M \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Sont équivalentes

- i) ${}^tMM = I_n$.
- ii) $M^tM = I_n$.
- iii) M inversible et $M^{-1} = {}^tM$.

Si une de ces conditions est vérifiée, on dit que la matrice M est *orthogonale*.

Remarques. i) $\Leftrightarrow$ « les colonnes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ »

ii) $\Leftrightarrow$ « les lignes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ »

Une *matrice de rotation* est une matrice orthogonale de déterminant 1.

Notations. $O_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R})$.

Exercices.

- 1) $\forall M = -{}^tM \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(I - M)(I + M)^{-1} \in SO_n(\mathbb{R})$.
- 2) $SO_n(\mathbb{R}) \leq O_n(\mathbb{R}) \leq GL_n(\mathbb{R})$.
- 3) Si $M \in O_n(\mathbb{R})$, $\det M = \pm 1$.

Exemples. Les matrices de permutations, $I_n - 2v^tv$ pour tout vecteur colonne v

de norme 1 pour le produit scalaire usuel, $-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \phi & \frac{1}{\phi} \\ -\phi & \frac{1}{\phi} & 1 \\ \frac{1}{\phi} & -1 & \phi \end{pmatrix}$

où $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

III.1 Symétries orthogonales

Définition. Soit $F \leq E$. La *symétrie orthogonale* par rapport à F est l'application linéaire $s_F : E \rightarrow E$, $\forall x \in F$, $\forall y \in F^\perp$, $x + y \mapsto x - y$.

Si F est de codimension 1, on dit que c'est une *réflexion orthogonale*. C'-à-d : $\forall x \in F$, $s_F(x) = x$, $\forall y \in F^\perp$, $s_F(y) = -y$.

Exercices.

- 1) Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. Alors s est une symétrie orthogonale $\Leftrightarrow s = \text{Id}_E$ et $\ker(s - 1) \perp \ker(s + 1)$.
- 2) Soit $F \leq E$. On a $s_F = 2p_F - \text{Id}_E = \text{Id}_E - 2p_{F^\perp}$.

- 3) Soit $v \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne de norme 1 (pour le produit scalaire usuel). Montrer que $I_n - 2v^t v$ est une réflexion orthogonale. *Par rapport à quel sous-espace ?*
- 4) Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que S est une matrice de symétrie orthogonale (pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$) $\Leftrightarrow S^2 = I_n$ et ${}^t S = S$.

Proposition. Une matrice de symétrie orthogonale est orthogonale. De plus, les réflexions orthogonales engendrent $O_n(\mathbb{R})$.

III.2 Dimension 2

Proposition. $SO_2(\mathbb{R}) = \{R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\}$, $O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R}) = \{S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Remarques. R_α est la rotation d'angle α , S_α est la symétrie orthogonale par rapport à la droite « qui fait un angle $\frac{\alpha}{2}$ avec l'axe des abscisses ».

Exercices.

- 1) $\forall \alpha, \beta, S_\alpha^2 = I_2, R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta}, S_\alpha S_\beta = R_{\alpha-\beta}, S_\alpha R_\beta = S_{\alpha-\beta}, R_\alpha S_\beta = S_{\alpha+\beta}$.
- 2) $R_\alpha = \exp \alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

III.3 Dimension 3

III.3.1 Produit vectoriel

Définitions. (*Produit vectoriel et produit mixte*)

- 1) $\forall x, y, z, x', y', z' \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$
- 2) $\forall x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'' \in \mathbb{R}, \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \right] := \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} \in \mathbb{R}.$

Propriétés.

- i) $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto u \wedge v$ est bilinéaire alternée.
- ii) $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3, [u, v, w] = (u \wedge v) \cdot w^\dagger$
- iii) $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3, u \wedge (v \wedge w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w.$
- iv) $\forall u, v \in \mathbb{R}^3, \|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 \sin^2 \alpha$ où $\alpha \in [0, \pi], (u \cdot v) = \|u\| \|v\| \cos \alpha.$
- v) (Jacobi) $\forall u, v, w, u \wedge (v \wedge w) + v \wedge (w \wedge u) + w \wedge (u \wedge v) = 0.$

Remarque. $\vec{x} \wedge \vec{y} \perp \vec{x}, \vec{y}.$

III.3.2 Formule de Rodrigues

Si $\vec{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on pose $\Lambda_{\vec{x}} := \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})^\dagger$. Soit

$\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ un vecteur de norme 1.

- La matrice de la rotation d'axe $\vec{k}$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ est $R_{\vec{k}, \theta} = I_3 + \sin \theta \Lambda_{\vec{k}} + (1 - \cos \theta) \Lambda_{\vec{k}}^2$.
- Comme application linéaire, on a :

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3, R_{\vec{k}, \theta}(\vec{v}) = \cos \theta \vec{v} + \sin \theta \vec{k} \wedge \vec{v} + (1 - \cos \theta)(\vec{k} \cdot \vec{v}) \vec{k}.$$

$$\text{Exemples. } R_{\vec{e}_1, \theta} = R_{1, \theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, R_{\vec{e}_3, \theta} = R_{3, \theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice. $R = \exp(\theta \Lambda_{\vec{k}}).$

[†]. Pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$.

[‡]. C'est la matrice de $\vec{v} \mapsto \vec{x} \wedge \vec{v}$.

III.3.3 Axes d'une rotation.

Théorème. Si $R \in O_3(\mathbb{R})$, alors il existe $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $Rv = \pm v$.

Démo. (Euler) Si ${}^tR \neq R$, soit $0 \neq v \in \ker {}^tR - R$.

Si ${}^tR = R$, alors $R^2 = I_3 \Rightarrow \mathbb{R}^3 = \ker(R - I_3) \oplus \ker(R + I_3)$.

Corollaire. Soit $R \in SO_3(\mathbb{R})$, alors si ${}^tR \neq R$, l'axe de la rotation R est

$$\ker R - I_3 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} R_{23} - R_{32} \\ R_{31} - R_{13} \\ R_{12} - R_{21} \end{pmatrix}.$$

Exercice. $\forall R \in SO_3(\mathbb{R}), \exists P \in SO_3(\mathbb{R}), R = {}^tPR_{1,\theta}P$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$.

III.3.4 Angles d'Euler

Exercice. Les matrices de $SO_3(\mathbb{R})$ sont de la forme

$$R_{1,\alpha}R_{3,\beta}R_{1,\gamma}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}.$$

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Indication. Soit $R \in SO_3(\mathbb{R})$. il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $R(\vec{e}_1) = R_{1,\alpha}R_{2,\beta}(\vec{e}_1)$.

Alors $\exists \gamma, (R_{1,\alpha}R_{2,\beta})^{-1}R = R_{1,\gamma}$.

III.4 Les réflexions orthogonales engendrent $O_n(\mathbb{R})$

Proposition. Soit $O \in O_n(\mathbb{R})$. Soit $k = \text{rang}(O - I_n)$. Alors il existe des réflexions orthogonales $r_1, \dots, r_k$ telles que $O = r_1 \dots r_k$.

Lemme. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \ker {}^t A = (\text{Im } A)^\perp$.

Démo. par récurrence sur $k \geq 0$.

Exercices.

- 1) Si $R = r_1 \dots r_k$ où $r_1, \dots, r_k$ sont des réflexions orthogonales, alors $k \geq \text{rang}(R - I_n)$. *Indication.* $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall r$ réflexion orthogonale, $\text{rang}(rA - I_n) \geq \text{rang}(A - I_n) - 1$.

- 2) Soit $O = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in O_4(\mathbb{R})$. Alors $\text{rang } O - I_4 = 3$ et

$$O = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{3 \text{ réflexions orthogonales}}.$$

- 3) Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Alors $I_n + A$ est inversible et $(I_n - A)(I_n + A)^{-1} \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$.

IV Réduction des endomorphismes adjoints

IV.1 Matrices symétriques

IV.1.1 Réduction

Théorème. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $A = PD^t P$.

Lemme. A possède une valeur propre réelle.

Démo. Par récurrence sur $n \geq 0$.

Exemples.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = PD^t P$ où $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$

b) Soit $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ & \diagdown & \diagup & \\ -1 & & & -1 \\ & \diagup & \diagdown & \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors $C = PD^tP$ où $P = \left(\sin \frac{ij\pi}{n+1}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$

et $D = \begin{pmatrix} 2 - 2 \cos \frac{\pi}{n+1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & & 2 - 2 \cos \frac{n\pi}{n+1} \end{pmatrix}$.

Exercices.

1. Si $\lambda \neq \mu$, alors $\ker(A - \lambda) \perp \ker(A - \mu)$.
2. Montrer que la matrice symétrique $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

IV.1.2 Signature.

Définition. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A . On note $\text{sign}(A) = (p, q)$ la signature de A où

$$p = |\{1 \leq i \leq n : \lambda_i > 0\}|$$

$$q = |\{1 \leq i \leq n : \lambda_i < 0\}|;$$

c'est la *signature* de A .

Exercices.

- 1) $p + q = \text{rang}(A)$.
- 2) $\text{sign} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (2, 0)$, $\text{sign} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1, 0)$, $\text{sign} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1, 1)$.

IV.1.3 Min-max.

Théorème. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soient $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A .

Alors

$$\lambda_k = \min_{\substack{F \leq \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \\ \dim F = k}} \max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} {}^t x A x = \max_{\substack{F \leq \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \\ \dim F = n-k+1}} \min_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} {}^t x A x .$$

Exercices.

- 1) Avec les notations du théorème, vérifier que si $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors $\lambda_1(A) + \lambda_1(B) \leq \lambda_1(A + B) \leq \lambda_n(A + B) \leq \lambda_n(A) + \lambda_n(B)$.
- 2) Démontrer le *critère de Sylvester avec les mineurs principaux* à l'aide du théorème ci-dessus.

IV.2 Adjoint d'un endomorphisme

Théorème de Riesz. Soit E un espace euclidien. $\forall \lambda \in E^*, \exists x_\lambda \in E, \lambda = \langle x_\lambda, \cdot \rangle$.

Définition. Soit E un espace euclidien. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on pose $f^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x, y \in E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle .$$

Exercice. Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E , alors $[f^*]_{\mathcal{B}} = {}^t[f]_{\mathcal{B}}$.

IV.3 Réduction des endomorphismes normaux

Lemme. Soit E un $\mathbb{R}$ –espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f laisse stable un sous-espace vectoriel de E de dimension 1 ou 2.

Théorème. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA = A^tA$. Alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A = PA'^tP$$

où A' est de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 & & & & & \\ & \dots & & & & \\ & & x_r & & & \\ & & & \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} & & \\ & & & & \dots & \\ & & & & & \begin{pmatrix} \alpha_s & -\beta_s \\ \beta_s & \alpha_s \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

où $x_1, \dots, x_r, \alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, \alpha_r \pm i\beta_r$ sont les valeurs propres de A' .

Cas particuliers. A symétrique, antisymétrique ou orthogonale.

Exercice. Dédurre du théorème que $\exp : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est surjective.