Université Claude Bernard Lyon 1
L1

Semestre de printemps 2024
UE : Analyse 2 pour informaticiens

Contrôle continu du 13 février 2024
Solutionnaire

Avant-propos

Les phrases en italique désignent des commentaires ou des explications supplémentaires, et ne font pas partie de la réponse attendue. Les réponses qui suivent ont été rédigées de la façon la plus détaillée possible, pour vous aider à comprendre au mieux la correction. Il n'est pas nécessaire d'écrire autant pour avoir tous les points (même si c'est fortement encouragé de bien rédiger votre réponse !). En revanche, les éléments qui doivent impérativement figurer sur votre copie sous peine de perdre des points sont mis en évidence dans la solution.

Question de théorie

a. On dit que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *dérivable à gauche* en $x = 3$ lorsque la limite

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

existe.

On peut préciser qu'on note $f'_g(3)$ *cette limite, mais cela n'est pas obligatoire.*

b. On dit que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *contractante* lorsqu'il existe $0 \leq k < 1$ tel que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(y) - f(y)| \leq k|y - x|.$$

Il est également correct d'écrire $0 < k < 1$. *Les deux définitions sont équivalentes. En revanche, il est crucial d'écrire* $k < 1$ *et non* $k \leq 1$.

Exercice 1

Comme le dit l'indication, il suffit d'étudier la continuité et la dérivabilité en $x = 0$ et $x = 1$. On commence par traiter le point $x = 0$. Puisque l'application $x \mapsto e^x - x$ est continue (en tant que somme de fonctions usuelles), nous avons

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \mathrm{e}^x - x = \mathrm{e}^0 - 0 = 1.$$

De même, l'application $x \mapsto \cos^2(\pi x)$ étant continue en tant que composée de fonctions usuelles, nous obtenons

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \cos^2(\pi x) = \cos^2(0) = 1.$$

Enfin, nous avons

$$f(0) = \cos^2(0) = 1.$$

Puisque

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x),$$

on conclut que f est continue en 0.

De façon analogue, on démontre la continuité en 1 en calculant

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \cos^2(\pi x) = \cos^2(\pi) = (-1)^2 = 1,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 1 + \frac{\ln x}{x} = 1 + \frac{\ln 1}{1} = 1,$$

et

$$f(1) = \cos^2(\pi) = 1,$$

ce qui assure que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x),$$

et démontre la continuité de f en 1.

Afin d'avoir tous les points pour cette partie de la question, il est crucial de calculer les deux limites latérales ***et*** *la valeur au point. Étudier uniquement les deux limites latérales, par exemple, ne suffit pas à assurer la continuité de la fonction. (On pourra s'en convaincre avec une fonction présentant un « trou » au point considéré.)*

On étudie à présent la dérivabilité de la fonction. En dehors de $\{0, 1\}$, un rapide calcul livre

$$f'(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x < 0, \\ -2\pi\cos(\pi x)\sin(\pi x) & \text{si } 0 < x < 1, \\ \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Même si l'expression avec le cos *définit f également en* 0 *et* 1*, il est erroné de calculer la dérivée en ces deux points à partir de cette expression. En effet, pour des fonctions définies par morceaux, on ne peut utiliser les règles du calcul des dérivées qu'à l'**intérieur** des intervalles de définition des différentes branches de la fonction, pas aux points de recollement, qui nécessitent davantage de précaution. Ainsi, écrire* $0 \leq x \leq 1$ *au lieu de* $0 < x < 1$ *dans le calcul qui précède vous fera perdre des points.*

À partir de l'expression qui précède, nous calculons

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} e^x - 1 = 0$$

et

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} -2\pi\cos(\pi x)\sin(\pi x) = 0.$$

Puisque $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0 = \lim_{x \to 0^+} f'(x)$ et que f est continue en 0, par un résultat du cours, nous concluons que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.

Même si cela a déjà été démontré, il faut rappeler que f est continue en 0 *afin de pouvoir invoquer le résultat du cours garantissant la dérivabilité lorsque les limites à gauche et à droite de la dérivée existent et coïncident. On pourra penser à la fonction qui vaut* 0 *si* $x < 0$ *et* 1 *si* $x \geq 0$ *pour constater l'importance de cette hypothèse.*

De même, nous calculons

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} = 1$$

et

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} -2\pi\cos(\pi x)\sin(\pi x) = 0.$$

Puisque les limites à gauche et à droite existent mais diffèrent, on conclut que f n'est pas dérivable en 1.

Rappelons ici l'importance que les limites à gauche et à droite existent pour appliquer le critère de non-dérivabilité. En effet, la fonction définie par $x \mapsto x^2\sin(1/x)$ *pour* $x \neq 0$ *et* 0 *pour* $x = 0$ *est telle que les limites à gauche et à droite de sa dérivée en* 0 *n'existent pas, mais elle est malgré* *tout dérivable en* 0*, comme vu en séance d'exercices.*

Exercice 2

a. Le *théorème des accroissements finis* stipule que, si $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

b. La fonction sin étant continue sur $[0, 0.01]$ et dérivable sur $]0, 0.01[$, le théorème des accroissements finis s'applique et assure l'existence de $c \in]0, 0.01[$ tel que

$$\frac{\sin 0.01 - \sin 0}{0.01 - 0} = \sin' c.$$

Or, nous avons

$$\frac{\sin 0.01 - \sin 0}{0.01 - 0} = \frac{\sin 0.01}{0.01},$$

ainsi que

$$\sin' c = \cos c.$$

Puisque $\cos x \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, en particulier, nous avons $\cos c \leq 1$. On en conclut que

$$\sin 0.01 = 0.01 \cos c \leq 0.01,$$

ce qui démontre l'inégalité souhaitée.

c. La fonction arctan étant continue sur $[\sqrt{3}, 3]$ et dérivable sur $]\sqrt{3}, 3[$, on peut invoquer le théorème des accroissements finis pour obtenir $c \in]\sqrt{3}, 3[$ tel que

$$\frac{\arctan 3 - \arctan \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \arctan' c.$$

Or, nous savons que

$$\arctan' c = \frac{1}{1 + c^2}.$$

Par conséquent, en utilisant l'indication pour déterminer $\arctan\sqrt{3}$, nous avons

$$\arctan 3 - \frac{\pi}{3} = \frac{3-\sqrt{3}}{1+c^2}.$$

Puisque $c \geq \sqrt{3}$, nous avons $c^2 \geq 3$, d'où $1 + c^2 \geq 4$, et finalement

$$\frac{3-\sqrt{3}}{1+c^2} \leq \frac{3-\sqrt{3}}{4}.$$

Ceci permet de conclure que

$$\arctan 3 \leq \frac{\pi}{3} + \frac{3-\sqrt{3}}{4},$$

ce qui démontre l'inégalité de droite.

De même, en utilisant $c \leq 3$, nous avons $1 + c^2 \leq 10$, et donc

$$\frac{3-\sqrt{3}}{1+c^2} \geq \frac{3-\sqrt{3}}{10},$$

ce qui livre l'inégalité de gauche.

Exercice 3

a. Pour déterminer les extrema locaux, on recherche les zéros de la dérivée. On calcule $f'(x) = 2x - 4$, et donc $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 2$. L'unique candidat extremum local est donc $x = 2$. Comme $f''(2) = 2 > 0$, $x_{\min} = 2$ est un minimum local.

En cherchant seulement les points qui annulent la dérivée première, on ne peut pas savoir si les candidats trouvés sont bien des extrema locaux, ou seulement des points stationnaires. Le test de la dérivée seconde présenté ci-dessus permet de lever cette incertitude. Dans ce cas particulier, comme nous avons affaire à une fonction du second degré avec un coefficient positif devant le terme d'ordre 2*, nous savons que son unique extremum est un minimum local (et même global), et on peut donc se passer de ce test. Cela pouvait également se justifier à l'aide d'un tableau de variation. Quoi qu'il en soit, vous ne perdez pas de point si vous avez uniquement recherché les zéros de la dérivée première, même s'il est plus rigoureux de justifier qu'il s'agit bien d'un extremum, quelle que soit la méthode employée pour ce faire.*

L'équation des points fixes s'écrit $x = f(x) = x^2 - 4x + 6$, ou encore, $x^2 - 5x + 6 = 0$. Comme $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$, les deux solutions sont $l_- = 2$ et $l_+ = 3$.

Bien entendu, on pouvait également employer le discriminant (ou déterminant, selon la terminologie que vous avez apprise). Simplement, il est plus rapide d'observer qu'on a affaire à un produit remarquable.

Le graphe de la fonction f est représenté sur la figure 1. On y a également représenté, en bleu, le graphe de la droite d'équation $y = x$. Cela permet de repérer les points fixes de f, correspondant aux intersections entre cette droite et le graphe de f.

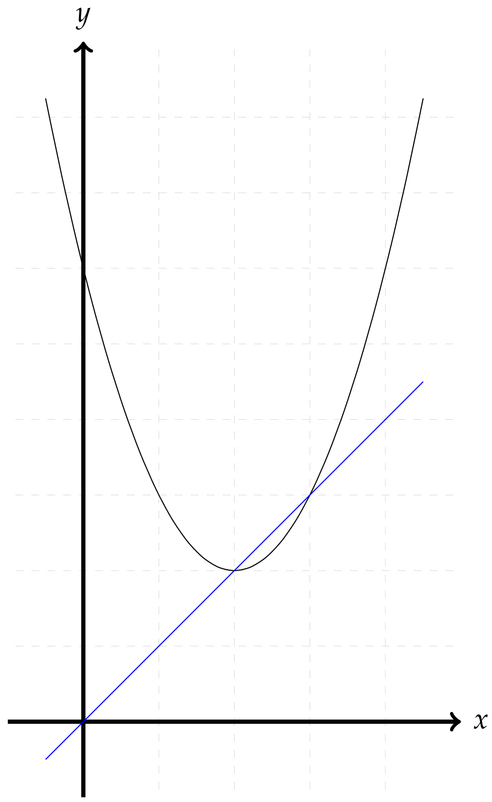

FIGURE 1 – Graphe de la fonction f

b. La fonction f étant continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, pour tous $x, y \in I$, le théorème des accroissements finis garantit l'existence de $c \in [x, y]$ tel que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x),$$

et donc,

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)||y - x|. \tag{0.1}$$

Pour montrer que f est contractante sur I, il suffit donc de trouver $0 \leq k < 1$ tel que $|f'(c)| \leq k$ pour tout $c \in I$. En effet, l'équation (0.1) entraînera alors que

$$|f(y) - f(x)| = k|y - x| \quad \text{pour tous } x, y \in I,$$

montrant que f est une contraction sur I, de facteur de contraction k.
Or, nous calculons $f'(c) = 2c - 4$, et donc, $|f'(c)| = 2|c - 2|$. Si $c \in I$, alors $|c - 2| \leq \frac{1}{4}$, d'où $|f'(c)| \leq \frac{1}{2}$. On conclut en prenant $k = \frac{1}{2}$.

c. On se repose sur un argument de monotonicité. Puisque $f'(x) = 2x - 4$, nous avons $f' \geq 0$ sur $[2, \frac{9}{4}]$ et $f' \leq 0$ sur $[\frac{7}{4}, 2]$. Autrement dit, f décroît sur $[\frac{7}{4}, 2]$ et croît sur $[2, \frac{9}{4}]$. Par conséquent, pour tout $x \in [2, \frac{9}{4}]$, nous avons

$$f(2) \leq f(x) \leq f\left(\frac{9}{4}\right).$$

Puisque

$$f(2) = 2 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{81}{16} - 9 + 6 = \frac{81 - 48}{16} = \frac{33}{16} \leq \frac{9}{4},$$

on en déduit que $f(x) \in I$. De même, pour tout $x \in [\frac{7}{4}, 2]$, nous avons

$$f(2) \leq f(x) \leq f\left(\frac{7}{4}\right).$$

Notez bien le changement de signe des inégalités par rapport au calcul sur $[2, \frac{9}{4}]$, *puisque de ce côté de* I, f *est décroissante plutôt que croissante.*
Puisque

$$f(2) = 2 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{49}{16} - 7 + 6 = \frac{49 - 16}{16} = \frac{33}{16} \leq \frac{9}{4},$$

on en déduit que $f(x) \in I$. Ceci permet de conclure que $f(I) \subset I$, autrement dit, I est stable par I.
Notez qu'en fait, I *est entièrement envoyé dans* $[2, \frac{33}{16}]$ *par* f. *En particulier, tant les points à gauche qu'à droite de* 2 *sont envoyés à droite de* 2.

d. L'intervalle I étant un intervalle fermé stable par f sur lequel f est contractante, et puisque $u_0 \in I$, on peut invoquer le théorème du point fixe pour déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point fixe de f dans I. Or, nous avons vu au point **a** que f possède exactement deux points fixes, 2 et 3, parmi lesquels seul 2 se trouve dans I. On en conclut que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 2.$$

Pour invoquer le théorème du point fixe, il est crucial de mentionner explicitement que toutes les hypothèses sont satisfaites : l'intervalle sur lequel on l'applique doit être fermé et stable par f, et f doit être une contraction sur cet intervalle. Cela fait donc trois hypothèses à rappeler.