Université Claude Bernard Lyon 1

Analyse2 INFO, printemps 2024

Fiche TD n°4,

Équations différentielles

Équations différentielles linéaires du premier ordre

Exercice 1.

Déterminer la solution générale, puis la spécialiser aux conditions initiales données.
(Ci-desous $y \in C^1(\mathbb{R})$ et l'argument de la fonction y est $x \in \mathbb{R}$).

a) $y' - 3y = 0, \quad y(0) = 2.$

b) $y' - 3y = 0, \quad y'(0) = 2.$

c) $y' + 2y = 0, \quad y(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{e}.$

d) $y' + \cos(x)\, y = 0, \quad y(\pi) = -2.$

e) $y' + \cos(x)\, y = 0, \quad y'(\pi) = -2.$

f) $y' + \sinh(x)\, y = 0, \quad y(0) = 1.$

g) $y' + x^2\, y = 0, \quad y(0) = e.$

h) $\cosh(x)\, y' - \sinh(x)\, y = 0, \quad y(0) = 2.$

i) $\cosh(x)\, y' + \sinh(x)\, y = 0, \quad y(0) = 2.$

j) $(1 + x^2)\, y' + y = 0, \quad y(1) = 1.$

k) $(1 + x^2)\, y' + x\, y = 0, \quad y(\sqrt{3}) = 1.$

Exercice 2.

Déterminer la solution générale de y pour $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, puis la spécialiser aux conditions initiales données.

a) $\sqrt{1 - 4x^2}\, y' + y = 0, \quad y(0) = 1.$

b) $\sqrt{1 - 4x^2}\, y' + y = 0, \quad y(\frac{1}{4}) = 1.$

c) $\sqrt{1 - 4x^2}\, y' + 4x\, y = 0, \quad y(0) = 1.$

d) $(1 - 4x^2)\, y' + 4x\, y = 0, \quad y(0) = 1.$

e) $(1 - 4x^2)\, y' + 8x\, y = 0, \quad y(0) = 1.$

f) $(1 - 4x^2)\, y' + 16x\, y = 0, \quad y(0) = 1.$

Exercice* 3.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad x^2 y'(x) - y(x) = 0, \; x \in I.$$

a) Déterminer les solutions de (E) quand $I =]0, +\infty[$.

b) Déterminer les solutions de (E) quand $I =]-\infty, 0[$.

c) (E) admet-elle des solutions non-nulles définies sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4 (CCF 2023)**.**

Dans cet exercice, nous voulons résoudre l'équation différentielle suivante pour la condition initiale $y(0) = 0$:

$$(2 + \sin x)\, y' + \cos(x)\, y = e^x. \tag{1}$$

a) Trouver la solution générale y_h du problème homogène associé, c.-à-d. de l'équation

$$(2 + \sin x)\, y' + \cos(x)\, y = 0.$$

b) Trouver une solution particulière y_p de l'équation différentielle (1) en utilisant la méthode de variation de la constante.

c) Conclure : donner la solution de l'équation (1) sous la condition initiale $y(0) = 0$.

Exercice 5.
Dans cet exercice, nous voulons résoudre l'équation différentielle suivante pour la condition initiale $y(0) = 0$:
$$(2 + \sin x)\, y' + \cos(x)\, y = xe^x. \tag{2}$$

a) Trouver la solution générale y_h du problème homogène associé, c.-à-d. de l'équation
$$(2 + \sin x)\, y' + \cos(x)\, y = 0.$$

b) Trouver une solution particulière y_p de l'équation différentielle (2) en utilisant la méthode de variation de la constante.

c) Conclure.

Exercice 6 (CC 2023)**.**
Dans cet exercice, nous voulons résoudre l'équation différentielle suivante pour la condition initiale $y(0) = 0$:
$$(1 + x^2)\, y' + 2x\, y = x \cos x. \tag{3}$$

a) Trouver la solution générale y_h du problème homogène associé, c.-à-d. de l'équation
$$(1 + x^2)\, y' + 2x\, y = 0.$$

b) Trouver une solution particulière y_p de l'équation différentielle (3) en utilisant la méthode de variation de la constante.

c) Conclure.

$\boxed{\textbf{Exercice}}$ **7.**

Le but de cet exercice est de trouver $y \in C^1(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$ qui satisfait
$$\cos(x)\, y' - 2\, y = 2\cos(x) + \sin(2x)$$
avec la condition initiale $y(0) = 1$.

a) Résoudre l'intégrale suivante pour $x \in]-1, 1[$:
$$I(x) = \int_0^x \frac{2}{1-u^2} du\,.$$

b) Résoudre l'intégrale suivante pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:
$$J(x) = \int_0^x \frac{2}{\cos(v)} dv\,.$$

Indication : On observe que $\frac{1}{\cos(v)} = \frac{\cos(v)}{1-\sin^2(v)}$. Avec un changement de variable, déduire J du résultat pour I.

c) Trouver la solution générale de
$$\cos(x)\, y' - 2\, y = 0$$
pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

d) Trouver une solution particulière de
$$\cos(x)\, y' - 2\, y = 2\cos(x) + \sin(2x)$$
pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Indication : Utiliser la méthode de variation de la constante.

e) Conclure.

Exercice 8 (CCF 2022)**.**

1. Résoudre sur $[0,+\infty[$ l'équation

$$(E_0): \quad y' - \frac{1}{2(x+1)}\, y = 0.$$

2. A l'aide du changement de variable $u = \sqrt{1+t}$, calculer

$$\lambda(x) = \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1+t}} dt$$

pour tout $x \in [0,+\infty[$.

3. Résoudre sur $[0,+\infty[$ l'équation différentielle

$$(E): \quad y' - \frac{1}{2(x+1)}\, y = x.$$

Exercice 9. Considérons les équations différentielles suivantes :

(E_1) : $y' - 2xy = \exp(x^2 - x)$.

(E_2) : $xy' - y + \ln(x) = 0$.

(E_3) : $y' - y\tan(x) = \sin(x)$.

(E_4) : $y'\sin(x) + y\cos(x) + 1 = 0$.

a) Déterminer la solution y de E_1 définie sur $\mathbb{R}$ et telle que $y(1) = 3$.

b) Déterminer la solution y de E_2 définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et telle que $y(e) = 1$.

c) Déterminer la solution y de E_3 définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et telle que $y(\frac{\pi}{4}) = 0$.

d) Déterminer la solution y de E_4 définie sur $]0,\pi[$ et telle que $y(\frac{\pi}{6}) = -1$.

Exercice 10.

a) Deviner une solution de $y' + y = 2$.

b) Trouver la solution générale du problème homogène associé, c-à-d. de l'équation $y' + y = 0$.

c) En déduire la solution générale du problème initial, c-à-d. pour $y' + y = 2$.

d) Trouver la solution de $y' + y = 2$ qui satisfait la condition initiale $y(0) = 3$.

Exercice 11.

a) Deviner une solution de $y' + y = 2e^x$.

b) Trouver la solution générale du problème homogène associé, c-à-d. de l'équation $y' + y = 0$.

c) En déduire la solution générale du problème initial, c-à-d. pour $y' + y = 2e^x$.

d) Trouver la solution de $y' + y = 2e^x$ qui satisfait la condition initiale $y(0) = 3$.

Exercice 12. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes (trouver dans chaqu'un de ces cas la solution générale, puis la spécialiser pour $y(0) = 1$) :

a) $y'(x) = x^2 y(x)$.

b) $y'(x) - x^2 y(x) = x^2$.

c) $y'(x) - x^2 y(x) = (1 - x^2)e^x$.

d) $y'(x) - x^2 y(x) = x^2 + (1 - x^2)e^x$.

Exercice 13.

a) Deviner une solution particulière de l'équation $\cosh(x)\, y' - \sinh(x)\, y = 1$.

b) Trouver la solution générale du problème homogène associé et en déduire la solution générale de $\cosh(x)\, y' - \sinh(x)\, y = 1$.

c) Spécialiser à la condition initiale $y(0) = 2$.

Exercice 14.

a) Deviner une solution particulière de l'équation $\sin(x)\, y' - \cos(x)\, y = 1$.

b) Trouver la solution générale de $\sin(x)\, y' - \cos(x)\, y = 0$ pour $x \in]0, \pi[$.

c) En déduire la solution spéciale qui satisfait la condition initiale $y(\frac{\pi}{2}) = 2$. Est-ce que cette solution est bien définiée à $x = \pi$?

d) En utilisant la solution générale de $\sin(x)\, y' - \cos(x)\, y = 0$ pour $x \in]\pi, 2\pi[$, trouver la solution spéciale qui satisfait la condition initiale $y(\frac{3\pi}{2}) = 2$. Est-ce que cette solution est bien définiée à $x = \pi$?

Exercice* 15.

Relation avec des espaces vectoriels :

a) Soit $a \in C^0(\mathbb{R})$. Montrer que

$$E = \{y \in C^1(\mathbb{R}) |\, y'(x) + a(x)\, y(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

est un sous-espace vectoriel de $C^1(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ? En donner une base.

b) Soient $a, b \in C^0(\mathbb{R})$ et b une fonction non-nulle. Montrer que

$$F = \{y \in C^1(\mathbb{R}) |\, y'(x) + a(x)\, y(x) = b(x),\ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

n'est pas un sous-espace vectoriel de $C^1(\mathbb{R})$.

Exercice 16. On considère l'équation différentielle $(E) :\ (x^2+1)y' - (2x+1)y = -2x^2+3$.

a) Montrer que (E) admet une solution définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto ax + b$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

b) En déduire la solution $y \in C^1(\mathbb{R})$ de (E) telle que $y(0) = 1$.

Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Exercice 17. (CC TMB 2009)

On va chercher à résoudre $y' + 2y = xe^{-x}$, $y(0) = 2$.

a) Résoudre l'équation homogène $y' + 2y = 0$.

b) Chercher une solution particulière de l'équation, soit on cherchant une solution sous la forme $y(x) = (ax+b)e^{-x}$, $a, b, \in \mathbb{R}$ soit au moyen de la méthode de variation de la constante.

c) En déduire toutes les solutions de l'équation proposée, puis la solution satisfaisant la condition initiale.

Exercice 18. On considère l'équation différentielle $(\omega \in \mathbb{R})$

$$(E) :\ y' + y = 3\sin(\omega x) + 4\cos(\omega x).$$

a) Montrer que (E) admet une solution ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = a\sin(\omega x) + b\cos(\omega x)$. a et b sont deux réels que l'on déterminera.

b) Retrouver une solution particulière en utilisant $3\sin(\omega x) + 4\cos(\omega x) = \Im\mathrm{m}\left((4-3i)\exp[i\omega x]\right)$.

c) Déterminer la solution $y \in C^1(\mathbb{R})$ de (E) telle que $y(\frac{\pi}{4}) = 0$.

Exercice 19.

Déterminer les solutions $y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des équations différentielles suivantes (solution générale, puis solution spéciale satisfaisant les conditions initiales).

a) $y'' + 4y' + 3y = 0.$ $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

b) $y'' + y' + y = 0.$ $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

c) $y'' + 2y' + y = 0.\ y(1) = -1,\ y'(1) = 1.$

d) $y'' + \omega^2 y = 0.\quad (\omega \in \mathbb{R}_+^*)\,;\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$

e) $y'' + my' + 9y = 0.\ (m \in \mathbb{R})\,;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$

f) $y'' - (1-\alpha)y' - \alpha y = 0.\ (\alpha \in \mathbb{R})\,;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$

Exercice 20 (CCF 2022)**.**

Déterminer y la solution définie sur $\mathbb{R}$ du problème suivant

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = 0 & ,\ x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 1, y'(0) = 5. \end{cases}$$

Exercice 21 (CCF 2023)**.**

a) Donner l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la récurrence

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

pour des conditions initiales $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$.

b) Trouver la solution de l'équation différentielle

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

pour des conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 22 (CC 2023)**.**

Le but de cet exercice est de trouver la solution de

$$y'' - 2y' + 10y = 20 \tag{4}$$

avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.

1. Trouver la solution générale y_h du problème homogène, c.-à-d. de l'équation

$$y'' - 2y' + 10y = 0.$$

2. Trouver une solution particulière y_p de l'équation différentielle (4).
Indication : En deviner une.
3. Spécifier la solution générale du problème et détérminer les constantes libres telles que les conditions initiales soient satisfaites.

Exercice 23.

Soit l'équation différentielle

$$(E) : y'' - 3y' + 2y = 4x^2.$$

a) Montrer que (E) admet une solution y_p définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels à déterminer.

b) Résoudre (E).

Exercice 24. Soit l'équation différentielle

$$(E) : y'' + 4y = \cos(x).$$

Déterminer la solution $y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de (E) telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.

Exercice 25.

Déterminer y la solution définie sur $\mathbb{R}$ du problème suivant

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = (5x-3)e^{2x} & , \ x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 1, y'(0) = 5. \end{cases}$$

Exercice 26.

Dans cet exercice, nous voulons résoudre l'équation différentielle suivante pour les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$:

$$y'' - 2y' + 3y = 9x^2 e^{2x} + 4e^x.$$

a) Trouver la solution générale y_0 du problème homogène associé, c.-à-d. de l'équation

$$y'' - 2y' + 3y = 0.$$

b) Trouver une solution particulière de l'équation

$$y'' - 2y' + 3y = 9x^2 e^{2x}.$$

Indication : Trouver une solution de la forme $y_1(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$.

c) Trouver une solution particulière y_2 de l'équation

$$y'' - 2y' + 3y = 4e^x.$$

d) Conclure.

Exercice 27 (CC 2023)**.**

Le but de cet exercice est de trouver la solution de

$$y'' + 2y' + 2y = 10\, e^x \tag{5}$$

avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.

1. Trouver la solution générale y_h du problème homogène, c.-à-d. de l'équation

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

2. Trouver une solution particulière y_p de l'équation différentielle (5).
3. Spécifier la solution générale du problème et détérminer les constantes libres telles que les conditions initiales soient satisfaites.

Exercice 28.

Soit l'équation différentielle

$$(E) : y'' - 4y' + 3y = (2x+1)\exp(-x).$$

Montrer que (E) admet une solution y_p définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto (ax+b)\exp(-x)$ où a et b sont des nombres réels à déterminer. Résoudre ensuite (E).

Exercice 29.

a) Trouver la solution générale pour $y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de

$$y'' - 6y' + 13y = 0\,.$$

b) Déterminer la solution qui satisfait $y(0) = 2$ et $y'(0) = 0$.

c) Déterminer la solution qui satisfait $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

d) Déterminer la solution de

$$y'' - 6y' + 13y = \exp(2x)\sin(3x)$$

qui satisfait $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Indication : On peut se servir du fait que $\exp(2x)\sin(3x) = \Im\mathrm{m}\,(\exp[(2+3i)x])$.

Exercice **30.**

Le but de cet exercice est de trouver la solution de

$$y'' + 2y' + 5y = 20\, e^x \cos 2x$$

avec les conditions initiales $y(0) = 3$ et $y'(0) = -3$.
Remarque : Une telle solution est unique. On obtient la même, que l'on exige dès le début que y soit à valeur réelle, $y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, ou que l'on admette y à valeur complexe, $y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

a) Trouver un système fondamental dans $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pour le problème homogène associé en utilisant la fonction exponentielle. Autrement dit, trouver une base pour l'espace vectoriel des solutions à l'équation

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

à valeurs complexes. Puis écrire la solution générale de ce problème homogène avec deux constants $A, B \in \mathbb{C}$. Quelle est la relation entre A et B de sorte que l'on ait une solution du problème homogène avec des valeurs réelles ?

b) En déduire un système fondamental pour le problème réel, c.-à-d. trouver une base pour l'espace vectoriel $E = \{y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) |\, y'' + 2y' + 5y = 0\}$. Puis écrire la solution générale du problème homogène avec deux constants $a, b \in \mathbb{R}$. Quelle est la relation entre A, B et a, b ?

c) Trouver une solution particulière.
Indication : Essayer $y = \alpha e^x \cos 2x + \beta e^x \sin 2x$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ou, mieux et équivalent (pourquoi ?), $y = \Re\mathrm{e}\,(C \exp[(1 + 2i)x])$, $C \equiv \alpha - i\beta \in \mathbb{C}$. Dans la deuxiéme méthode, on cherche d'abord une solution de la forme $y = C \exp[(1 + 2i)x]$, $C \in \mathbb{C}$, du problème $y'' + 2y' + 5y = 20 \exp[(1 + 2i)x]$ et ensuite seulement on prend en la partie réelle.

d) En déduire la solution générale et puis la spécialiser aux conditions initiales.