Exercice 1. *Un sous espace vectoriel de fonctions infiniment dérivables*

On pose E l'ensemble des fonctions de $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) + 4f(x) = 0$$

1. Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$
2. On admet que E est de dimension 2. Trouver une base de E
   Indication : chercher parmi les fonctions de la forme $x \mapsto sin(\alpha x)$ et $x \mapsto cos(\alpha x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
3. Montrer que pour la fonction $h : x \mapsto sin(2x + \theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ **fixé**, h est un élément de E. Exprimer h comme combinaison linéaire de la base construite à la question 2.

Exercice 2. *A-t-on unicité du supplémentaire ?*

On note $E = \mathbb{R}^3$. On introduit :

$$F = \{(x, y, z) \in E : x + y + z = 0 \text{ et } x - y + 3z = 0\}$$

$$G = \{(\alpha, \beta, \alpha + \beta) : (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$$
$$H = \{(2\alpha + \beta, \alpha + \beta, \alpha) : (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$$

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de E
   On admettra que G et H sont des sous espaces vectoriels de E
2. Montrer que $F = \{(-2t, t, t) : t \in \mathbb{R}\}$
3. En déduire $\dim(F)$
4. Montrer que $E = F \oplus G$
5. Montrer que $E = F \oplus H$
6. A-t-on $G = H$? Qu'en pensez vous ?