Exercice 1. *Un sous espace vectoriel de fonctions*

On pose E l'ensemble des fonctions de $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) + 4f(x) = 0$$

1. Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$
2. On admet que E est de dimension 2. Trouver une base de E
   Indication : chercher parmi les fonctions de la forme $x \mapsto sin(\alpha x)$ et $x \mapsto cos(\alpha x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
3. Montrer que pour la fonction $h : x \mapsto sin(2x + \theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ **fixé**, h est un élément de E. Exprimer h comme combinaison linéaire de la base construite à la question 2.

Démonstration. Dans l'entièreté de la correction, on notera $F := \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ pour s'alléger d'un poids

1. Il est clair que $E = \{f \in F : \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + 4f(x) = 0\}$

   Soit 0_F le zéro de F. Rappelons qu'il s'agit de la fonction nulle, et non d'une fonction évaluée en 0 (erreur courante chez les étudiants). Autrement dit :

   $$0_F(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

   Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $0_F''(x) + 4 \cdot 0_F(x) = 0 + 0 = 0$. D'où $0_F \in E$

   Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

   $$\begin{aligned}(f + \lambda g)''(x) + 4(f + \lambda g)(x) &= f''(x) + \lambda g''(x) + 4f(x) + 4\lambda g(x) \text{ par linéarité de la dérivée} \\ &= f''(x) + 4f(x) + \lambda(g''(x) + 4g(x)) \\ &= 0 + 0 \text{ car } f, g \in E \\ &= 0\end{aligned}$$

   D'où $f + \lambda g \in E$ Ainsi, E est bien un sous espace vectoriel de F
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Notons $f_\alpha : x \mapsto cos(\alpha x)$ et $g_\alpha : x \mapsto sin(\alpha x)$. On cherche une valeur de α telle que les fonctions sont des éléments de E. Soit $x \in \mathbb{R}$

   $$\begin{aligned}f_\alpha''(x) + 4f_\alpha(x) &= cos''(\alpha x) + 4cos(\alpha x) \\ &= -\alpha^2 cos(\alpha x) + 4cos(\alpha x) \\ &= cos(\alpha x)(4 - \alpha^2)\end{aligned}$$

   Il vient alors que :

   $$\begin{aligned}f_\alpha \in E &\iff f_\alpha''(x) + 4f_\alpha(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ &\iff cos(\alpha x)(4 - \alpha^2) = 0, \forall x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

   Cette égalité étant vérifiée pour tout x, et puisque la fonction cosinus ne s'annule pas

entièrement sur $\mathbb{R}$, il vient alors que $(4-\alpha^2)=0$ et donc $\alpha=\pm 2$.

On vérifie aisément que :
$\forall x \in \mathbb{R}, g_2''(x)+4g_2(x)=sin(2x)(4-4)=0$
On a alors montré que pour $\alpha=2$, les fonctions sont des éléments de E.
Notons $f=f_2$ et $g=g_2$
Montrons que $(f,g)=(x\mapsto cos(2x), x\mapsto sin(2x))$ forme une base de E
On va d'abord montrer qu'il s'agit d'une famille libre.
Soit $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\lambda_1 f+\lambda_2 g=0_F$. Autrement dit, $\forall x\in\mathbb{R}, \lambda_1 f(x)+\lambda_2 g(x)=0$

Les opérations que nous savons faire sur des fonctions **continues** sont les suivantes :
-Evaluer en une valeur astucieuse
-Dériver (si dérivable !)
-Intégrer sur un segment bien choisi
-Passer à la limite
-...
Il est important de connaître les différents outils qui sont à notre dispositions. Généralement, on commencera par essayer de trouver une évaluation astucieuse : trouver x tel que f s'annule pour x mais pas g
On sait que $\forall x\in\mathbb{R}, \lambda_1 f(x)+\lambda_2 g(x)=0$. Un tel résultat étant vrai pour tout x, il est entre autre vrai pour $x=\dfrac{\pi}{4}$:

$$\begin{aligned}0&=\lambda_1 cos(2x)+\lambda_2 sin(2x)\\&=\lambda_1 cos(\frac{\pi}{2})+\lambda_2 sin(\frac{\pi}{2})\\&=0+\lambda_2\\&=\lambda_2\end{aligned}$$

D'où $\lambda_2=0$. Il vient alors que $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lambda_1 cos(2x)=0$. Ce résultat est entre autre vrai pour $x=0$. D'où $\lambda_1=0$
Il en vient que (f,g) est libre dans E.
Supposons que (f,g) n'est pas génératrice de E. Pour former une base de E à partir de cette famille, il faut rajouter des vecteurs dans cette famille. Mais alors en faisant ça, on se retrouverait avec plus de vecteurs dans la famille que $\dim(E)$ et alors la famille ne serait plus libre. De ce fait, (f,g) engendre E et est donc une base de E

3. Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Montrons que $h\in E$. Soit $x\in\mathbb{R}$
$h''(x)+4h(x)=-4sin(2x+\theta)+4sin(2x+\theta)=0$. D'où $h\in E$

On souhaite écrire h comme combinaison linéaire d'un sinus et d'un cosinus... on a très envie d'utiliser nos formules de trigos préférées.
Rappel : $cos(a+b)=cos(a)cos(b)-sin(a)sin(b), sin(a+b)=sin(a)cos(b)+sin(b)cos(a)$
D'où $\forall x\in\mathbb{R}$:
$sin(2x+\theta)=sin(2x)cos(\theta)+cos(2x)sin(\theta)=cos(\theta)g(x)+sin(\theta)f(x)$
Ainsi, $h=sin(\theta)f+cos(\theta)g$

$\square$

Exercice 2. *A-t-on unicité du supplémentaire ?*

On note $E = \mathbb{R}^3$. On introduit :

$$F = \{(x, y, z) \in E : x + y + z = 0 \text{ et } x - y + 3z = 0\}$$

$$G = \{(\alpha, \beta, \alpha + \beta) : (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$H = \{(2\alpha + \beta, \alpha + \beta, \alpha) : (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$$

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de E
   On admettra que G et H sont des sous espaces vectoriels de E
2. Montrer que $F = \{(-2t, t, t) : t \in \mathbb{R}\}$
3. En déduire $\dim(F)$
4. Montrer que $E = F \oplus G$
5. Montrer que $E = F \oplus H$
6. A-t-on $G = H$? Qu'en pensez vous ?

Démonstration. Voici un semblant de corrigé :

1. Rappel : $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)$
   $0 + 0 + 0 = 0$ et $0 - 0 + 3 \cdot 0 = 0$ donc $0_E \in F$
   Soient $X = (x_1, x_2, x_3) \in F$, $Y = (y_1, y_2, y_3) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On pose $Z = X + \lambda Y = (x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2, x_3 + \lambda y_3)$:
   D'une part :
   $$\begin{aligned}(x_1 + \lambda y_1) + (x_2 + \lambda y_2) + (x_3 + \lambda y_3) &= (x_1 + x_2 + x_3) + \lambda(y_1 + y_2 + y_3)\\ &= 0 + 0 \text{ car } X, Y \in F\\ &= 0\end{aligned}$$
   D'autre part :
   $$\begin{aligned}(x_1 + \lambda y_1) - (x_2 + \lambda y_2) + 3(x_3 + \lambda y_3) &= (x_1 - x_2 + 3x_3) + \lambda(y_1 - y_2 + 3y_3)\\ &= 0 + 0 \text{ car } X, Y \in F\\ &= 0\end{aligned}$$
   D'où $Z \in F$
   F est donc un sous espace vectoriel de E
2. Soit $X = (x, y, z) \in F$. Alors :
   $$\begin{cases} x + y + z = 0 & L_1 \\ x - y + 3z = 0 & L_2 \end{cases}$$
   $$\iff \begin{cases} x + y + z = 0 & L_1 \\ -2y + 2z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases}$$
   $$\iff \begin{cases} y = z \\ x = -y - z = -2z \end{cases}$$
   D'où $X = (-2z, z, z)$ et alors $F \subset \{(-2t, t, t) : t \in \mathbb{R}\}$
   Inversement, soit $Y = (-2t, t, t) \in \{(-2t, t, t) : t \in \mathbb{R}\}$
   Alors $t(-2+1+1) = 0$ et $t(-2-1+3) = 0$. D'où $Y \in F$, ainsi , $F = \{(-2t, t, t) : t \in \mathbb{R}\}$
3. F est engendré par le vecteur $(-2, 1, 1)$ et la famille constituée de ce vecteur est évidemment libre. $((-2, 1, 1))$ est donc une base de F et alors $\dim(F) = 1$

4. Montrons que F et G sont en somme directe. Montrons donc que $F \cap G = \{0_E\}$
   F et G sont des sous espaces vectoriels, donc $F \cap G$ aussi, et donc $0_E \in F \cap G$
   Montrons que $F \cap G \subset 0_E$
   Soit $X = (x, y, z) \in F \cap G$
   Alors $X \in F$ et $X \in G$
   Donc X est solution du système : $\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ x - y + 3z &= 0 \end{cases}$ et $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x, y, z) = (\alpha, \beta, \alpha + \beta)$
   De ce fait :

   $$\begin{cases} \alpha + \beta + \alpha + \beta &= 0 \\ \alpha - \beta + 3(\alpha + \beta) &= 0 \end{cases}$$
   $$\iff \begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 0 \\ 4\alpha + 2\beta = 0 \end{cases}$$
   $$\iff \begin{cases} 2\alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$
   D'où $X = 0_E$, et ainsi, $F \cap G \subset \{0_E\}$
   Alors $F \cap G = \{0_E\}$ et donc $F \oplus G$

   Montrons maintenant que $F + G = E$
   D'une part, $F + G$ est un sous espace vectoriel de E donc $F + G \subset E$
   D'autre part, par le théorème de Grassmann :
   $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$
   Or $\dim(F) = 1$, $\dim(G) = 2$ (en exo) et $\dim(F \cap G) = 0$
   Donc $\dim(F + G) = 1 + 2 - 0 = 3 = \dim(E)$
   On a $F + G \subset E$ et $\dim(F + G) = \dim(E)$, donc $F + G = E$
   Ainsi, $E = F \oplus G$

5. De la même manière, montrons que $E = F \oplus H$ Montrons que F et H sont en somme directe.
   Montrons donc que $F \cap H = \{0_E\}$
   F et H sont des sous espaces vectoriels, donc $F \cap H$ aussi, et donc $0_E \in F \cap H$
   Montrons que $F \cap H \subset 0_E$
   Soit $X = (x, y, z) \in F \cap H$
   Alors $X \in F$ et $X \in H$
   Donc X est solution du système : $\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ x - y + 3z &= 0 \end{cases}$ et $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x, y, z) = (2\alpha + \beta, \alpha + \beta, \alpha)$
   De ce fait :

   $$\begin{cases} (2\alpha + \beta) + (\alpha + \beta) + \alpha &= 0 \\ (2\alpha + \beta) - (\alpha + \beta) + 3\alpha &= 0 \end{cases}$$
   $$\iff \begin{cases} 4\alpha + 2\beta = 0 \\ 4\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

D'où $X = 0_E$, et ainsi, $F \cap H \subset \{0_E\}$
Alors $F \cap H = \{0_E\}$ et donc $F \oplus H$

Montrons maintenant que $F + H = E$
D'une part, $F + H$ est un sous espace vectoriel de E donc $F + H \subset E$
D'autre part, par le théorème de Grassmann :
$\dim(F + H) = \dim(F) + \dim(H) - \dim(F \cap H)$
Or $\dim(F) = 1$, $\dim(H) = 2$ (en exo) et $\dim(F \cap H) = 0$
Donc $\dim(F + H) = 1 + 2 - 0 = 3 = \dim(E)$
On a $F + H \subset E$ et $\dim(F + H) = \dim(E)$, donc $F + H = E$
Ainsi, $E = F \oplus H$

6. Il suffit de trouver un élément de G qui n'appartient pas à H
$(1, 1, 2) = (1, 1, 1 + 1)$, il existe donc $\alpha = 1$ et $\beta = 1$ tels que $(1, 1, 2) = (\alpha, \beta, \alpha + \beta)$.
D'où $(1, 1, 2) \in G$
Par l'absurde, supposons que $(1, 1, 2) \in H$
Alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $(1, 1, 2) = (2\alpha + \beta, \alpha + \beta, \alpha)$. Par identification :

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 1 \\ \alpha + \beta = 1 \\ \alpha = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 - 4 = -3 \\ \beta = 1 - 2 = -1 \end{cases}$$

On aboutit à une contradiction. Donc $(1, 1, 2) \notin H$
D'où $G \neq H$

Ce résultat peut surprendre car $F \oplus G = F \oplus H$. Mais il s'agit d'un résultat connu qu'on vient de redémontrer : le supplémentaire d'un espace vectoriel n'est la plupart du temps en aucun cas unique.

$\square$