Corrigé CCF Analyse 2

(3 mai 2024)

Ex. 1

1.1 $\lim\limits_{x \to 0_-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0_-} (x \sin x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0_+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0_+} x^4/4 = 0$ // $\Rightarrow$ $\boxed{\text{OOI}}$

1.2 pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ la dérivée de f est bien definie et on a :

$$f'(x) = \begin{cases} \sin x + x \cos x & \text{si } x < 0 \\ x/2 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

avec ceci on trouve :

$$\lim_{x \to 0_-} f'(x) = 0 = \lim_{x \to 0_+} f'(x) \quad (+)$$

Avec une proposition du cours on a : (*) ET 1.1 $\Rightarrow$

$$\boxed{f \text{ dérivable en } 0.}$$

1.3

$$\lim_{x\to 1_-} f(x) = \lim_{x\to 1_-} \frac{x^2}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 1_+} f(x) = \lim_{x\to 1_+} \arctan(x) = $$
$$= \arctan(1) = \pi/4$$

$\Rightarrow$ f n'est pas continue en 1

$\Rightarrow$ f n'est pas dérivable en 1

ALORS $\boxed{\text{NON}}$

Ex. 2

2.1

$$I=\int_0^{\pi/2} x^2\cos x\,dx = \left[x^2\sin x\right]_0^{\pi/2} -$$

$u=x^2 \quad v'=\cos x$

$u'=2x \quad v=\sin x$

$$-\int_0^{\pi/2} 2x\sin x\,dx = \frac{\pi^2}{4}-2J$$

$$J=\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx = \underbrace{\left[-x\cos x\right]_0^{\pi/2}}_{0} + \underbrace{\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx}_{\left[\sin x\right]_0^{\pi/2}=1}$$

$u=x \quad v'=\sin x$

$u'=1 \quad v=-\cos x$

$$\Rightarrow \boxed{I=\frac{\pi^2}{4}-2}$$

2.2. $$I := \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$x = \sin u$

$dx = \cos u \, du$

x	u
$\sqrt{3}/2$	$\pi/3$
$1/2$	$\pi/6$

pour $u \in [\pi/6, \pi/3]$

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 u} = |\cos u| = \cos u$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin^2 u}{\cancel{\cos u}} \cancel{\cos u}\, du$$

$$\Rightarrow I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin^2 u \, du = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/3} \big(1-\cos(2u)\big)\, du$$

$$I = \frac{1}{2}\left[u - \frac{\sin(2u)}{2}\right]_{\pi/6}^{\pi/3} = \pi/12$$ car

$$\sin\left(2\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2\frac{\pi}{6}\right)$$

alors $\boxed{I = \frac{\pi}{12}}$

Rq. : $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin^2 u \, du$ peut être resoulu aussi par un IPP.

Ex. 3

3.1 $\quad y' - \dfrac{e^x}{e^x+1} y = 0$

$$\frac{e^x}{e^x+1} = \left(\ln(e^x+1)\right)'$$

$$\Rightarrow \quad y = C \exp\left(\ln(e^x+1)\right) = C \cdot (e^x+1)$$

$$\boxed{y_h(x) = C \cdot (e^x+1), \quad C \in \mathbb{R}}$$

3.2

$$y_p(x) := C(x) \cdot (e^x+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (e^x+1)\, y_p' - e^x y_p = (e^x+1)\, C' \cdot (e^x+1)$$

cf. CM!

$$\Rightarrow C' \cdot (e^x+1)^2 \overset{!}{=} x \cdot (e^x+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C'(x) = x \Leftarrow C(x) = \frac{x^2}{2}$$

Alors $\boxed{y_p(x) = \frac{x^2}{2}(e^x+1)}$

3.3 la solution générale :

$$y(x) = y_h + y_p = \left(C + \frac{x^2}{2}\right)(e^x+1)$$

Afin de trouver la solution au problème, il est nécessaire de mettre en oeuvre la condition initiale : $y(0) = 2C \overset{!}{=} 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow C = 1 \Rightarrow$

LA sol. du pb. : $\boxed{y(x) = \frac{x^2+1}{2} \cdot (e^x + 1)}$

Ex. 4

4.1 eq. car. : $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{49}{4} - 12}}_{1/2} = \begin{cases} 3 \\ 4 \end{cases}$$

$$\boxed{y_h(x) = Ae^{3x} + Be^{4x},\ A, B \in \mathbb{R}}$$

4.2 $y = Ce^{2x} \Rightarrow$

$$y'' - 7y' + 12y = C(4 - 14 + 12)e^{2x} \overset{!}{=} 2e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow 2C = 2 \Leftrightarrow C = 1 \quad \text{Alors}$$

$$\boxed{y_p(x) = e^{2x}}$$

4.3 $y(x) = \underbrace{Ae^{3x} + Be^{4x}}_{y_h(x)} + \underbrace{e^{2x}}_{y_p(x)}$

$$\Rightarrow \quad y(0) = A + B + 1 \overset{!}{=} 1$$
$$y'(0) = 3A + 4B + 2 \overset{!}{=} 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{matrix} A + B = 0 \\ 3A + 4B = 0 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad A = B = 0$$

car $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$

Alors, la solution : $\boxed{y(x) = e^{2x}}$

Remarque importante :

Même si $y(x) = 2e^{4x} - e^{3x}$ satisfait les conditions initiales,

$y(x) = 2e^{4x} - e^{3x} + e^{2x}$ ne le fait plus.

Les conditions initiales doivent être mises en œuvre APRÈS l'ajout de la solution particulière !

Cela n'a pas d'importance uniquement si la solution particulière ne contribue pas aux conditions initiales (comme dans l'Ex. 3 ci-dessus).

Ex. 5

5.1 $f(x) = \sin x$,

i	$f^{(i)}(x)$	$f^{(i)}(0)$
0	$\sin x$	0
1	$\cos x$	1
2	$-\sin x$	0
3	$-\cos x$	-1

Taylor - Young :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{3} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i + o(x^3) =$$

$$\overset{\text{ici}}{=} 0 + 1 \cdot x + 0 - \frac{1}{3!} x^3 + o(x^3)$$

Alors : $\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$

5.2 $\sin(x^2) = \sin(X)$ avec

$X = x^2$

fonction composée et $x^2\Big|_{x=0} = 0$.

$$\sin(X) = X - \frac{X^3}{6} + o(X^3) = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$$

Alors $\boxed{\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)}$

5.3 $(\sin x)^2 = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 =$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + o(x^4) =$$

car $x \cdot o(x^3) = o(x^4)$ car $c \cdot x^6 = 0 + o(x^4)$

$$= x^2 - 2 \times \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

Alors $\boxed{(\sin x)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)}$

5.4. $L := \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x^2) - (\sin x)^2}{x^4} =$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^2} - \left(\cancel{x^2} - \frac{x^4}{3}\right) + o(x^4)}{x^4}$$

$$L = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{3} + o(1) \right) = \frac{1}{3}$$

Alors $\boxed{L = \frac{1}{3}}$

Rq.: Avec de l'Hôpital, 5.4 est beaucoup plus lourd à faire!

Ex. 6

6.1 TAF pour $f(x) = e^x$ et $x \neq y$, $x, y \in [0,1]$ donne :

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x-y)$$

pour $c \in]0,1[$ (ou même pour c entre x et y)

$$f'(c) = e^c < e^1 < 3$$

car exp $\nearrow$

Alors $|e^x - e^y| \leq 3|x-y|$ qui reste évidemment aussi correcte si $x=y$. #

6.2 $y := 0 \Rightarrow |e^x - 1| \leq 3|x|$

$\forall x \in [0,1]$

exp croissante et $e^0 = 1 \Rightarrow \underline{1 \leq e^x}$

$\Rightarrow e^x - 1 \geq 0$ et alors

$$\underline{e^x - 1 \leq 3x}$$

Alors $\boxed{1 \leq e^x \leq 1+3x, \forall x \in [0,1]}$

Rq.: On en déduit que

$$\exp(0.02) \in [1, 1.06].$$

6.3

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + e^c \cdot \frac{x^4}{24}$$

avec $c \in [0, x]$ (ou $\underset{\text{si } x<0}{c \in [x, 0]}$).

6.4 pour $x = 0.02 = 2 \cdot 10^{-2}$ on a

$$e^x = \underbrace{1 + 2\cdot 10^{-2} + 2\cdot 10^{-4}}_{1.0202} + \underbrace{\frac{4}{3}}_{1.\dot{3}} \cdot 10^{-6} + \underbrace{e^c \cdot \frac{2}{3} \cdot 10^{-8}}_{=: R}$$

$$1 \leq e^c \leq 1 + 3c \leq 1 + 3 \cdot 2 \cdot 10^{-2}$$

car $0 < c < x = 2 \cdot 10^{-2}$

alors

$$e^{0.02} = 1.020201\dot{3} + R \quad \text{et}$$

$$\frac{2}{3}\cdot 10^{-8} \leq R \leq \frac{2}{3}\cdot 10^{-8} + 4\cdot 10^{-10} < 10^{-8}$$

Alors

$$\boxed{\begin{array}{c} \exp(0.02) = 1.020201\dot{3} + R \\ \text{avec} \quad 0 < R < 10^{-8} \end{array}}\ .$$

Rq.: $e^{0.02} = 1.0202013400\ldots$