Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre de printemps 2023-2024**

L1 Math-Info | UE : Analyse 2

Examen final - 3 mai 2024

DURÉE 2H

Avertissement : *Tout appareil électronique et toute communication pendant l'examen sont interdits. Toute réponse doit être justifiée, sauf indication contraire. Le nombre de points obtenus constitue une note sur 20.*

Exercice 1. (Dérivabilité) (3 points)

Considérons la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x \sin x & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{x^2}{4} & \text{si } 0 < x < 1, \\ \arctan x & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

1. (0.5 pts) La fonction f est-elle continue en 0 ?
2. (1 pt) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
3. (1.5 pts) La fonction f est-elle dérivable en 1 ?

Exercice 2. (Intégration) (4 points)

Calculer les intégrales suivantes :

1. (2 pts)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \, \mathrm{d}x\,;$$

2. (2 pts)

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x.$$

Indication : Utiliser le changement de variable $x = \sin u$.

Ensuite, on pourra également—à la place d'une IPP—utiliser la formule de Carnot :

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}\left(1 - \cos(2x)\right).$$

Exercice 3. (Équation différentielle d'ordre 1) (4 points)

L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation différentielle

$$(\mathrm{e}^x + 1)y'(x) - \mathrm{e}^x y(x) = x(\mathrm{e}^x + 1)^2 \tag{1}$$

pour la condition initiale $y(0) = 1$.

1. (1.5 pts) Trouver la solution générale y_{h} du problème homogène associé

$$(\mathrm{e}^x + 1)y'(x) - \mathrm{e}^x y(x) = 0.$$

2. (1.5 pts) En utilisant la méthode de variation de la constante, trouver une solution particulière y_{p} de l'équation (1).
3. (1 pt) En déduire la solution de l'équation (1) pour la condition initiale prescrite $y(0) = 1$.

Exercice 4. **(Équation différentielle d'ordre 2)** **(2.5 points)**

L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation différentielle

$$y''(x) - 7y'(x) + 12y(x) = 2\mathrm{e}^{2x} \tag{2}$$

pour la condition initiale $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.

1. (1 pt) Trouver la solution générale y_h du problème homogène associé

$$y''(x) - 7y'(x) + 12y(x) = 0.$$

2. (0.5 pts) Trouver une solution particulière y_p de l'équation (2).
Indication : rechercher une solution particulière sous la forme $y_\mathrm{p}(x) = C\mathrm{e}^{2x}$.
3. (1 pt) En déduire la solution de l'équation (2) pour la condition initiale prescrite
$y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.

Exercice 5. **(Développement limité)** **(3.5 points)**

1. (1 pt) En utilisant la définition et en détaillant bien toutes les étapes de votre calcul, calculer le développement limité de $\sin(x)$ à l'ordre 3 autour de 0.
2. (0.5 pts) En utilisant le point 1, calculer le développement limité de $\sin(x^2)$ à l'ordre 6 autour de 0.
3. (1 pt) En utilisant le point 1, calculer le développement limité de $(\sin(x))^2$ à l'ordre 4 autour de 0.
4. (1 pt) En déduire la valeur de la limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2) - (\sin(x))^2}{x^4},$$

si elle existe. (Si vous n'avez pas su répondre aux points qui précèdent, vous pouvez également calculer cette limite à l'aide d'une autre méthode de votre choix.)

Exercice 6. **(TAF et Taylor-Lagrange)** **(4 points)**

1. (1 pt) Montrer que pour tous réels x et y compris entre 0 et 1, nous avons

$$|\exp x - \exp y| \leq 3|x - y|.$$

Indication : on rappelle que $\exp 1 = \mathrm{e} \leq 3$.
2. (1 pt) En déduire que, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$1 \leq \exp x \leq 1 + 3x.$$

3. (0.5 pts) Écrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction exp à l'ordre 3 entre 0 et x. (Il suffit de fournir la formule sans justification).
4. (1.5 pts) En déduire une valeur approchée de $\exp(0.02)$ à 10^{-8} près.
Indication : on pensera à utiliser le point 2 pour majorer le reste.