

Contrôle continu du 19 mars 2024

Durée : 60 minutes

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Toutes les réponses doivent être justifiées.

Tous les résultats doivent être simplifiés au maximum.

Exercice 1 (3+3 points)

En utilisant l'intégration par parties, calculer l'intégrale I et trouver toutes les primitives $J(x)$:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{-x} \cos(x) dx$$

$$J(x) = \int (\ln x)^2 dx$$

Solution 1

$$I = \frac{1}{4} \left[\sqrt{3} - 1 \right] e^{-\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2} \quad (3 \text{ points}) \quad J = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C \quad (3 \text{ points})$$

Exercice 2 (5+5 points)

Calculer les intégrales suivantes

$$K = \int_{-4}^{-3} \frac{9}{(x-1)(x+2)^2} dx$$

$$L = \int_{-4}^6 \frac{8}{x^2+4} dx$$

Indication: Pour tout $A, B \in \mathbb{R}$ avec $AB \neq 1$ on a

$$\arctan(A) + \arctan(B) = \arctan\left(\frac{A+B}{1-AB}\right) + \Delta(A, B),$$

où $\Delta(A, B) = 0$ si $AB < 1$, $\Delta(A, B) = \pi$ si $AB > 1$, $A > 0$ et $\Delta(A, B) = -\pi$ si $AB > 1$, $A < 0$.

Solution 2

$$K = \left[\ln|x-1| - \ln|x+2| + \frac{3}{x+2} \right]_{-4}^{-3} = \ln\left(\frac{8}{5}\right) - \frac{3}{2} \quad (5 \text{ points})$$

$$L = 4 [\arctan u]_{u=-2}^3 = 3\pi \quad (5 \text{ points})$$

Exercice 3 (4 points)

Résoudre l'équation différentielle

$$y' + \frac{x}{1+x^2}y = 0$$

pour la condition initiale $y(1) = 1$.

Solution 3

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{1+x^2}} \quad (3 + 1 \text{ points})$$