Université Claude Bernard Lyon 1

ANALYSE 2 INFO, printemps 2024

Fiche TD n°5,

Développements limités et formules de Taylor

Exercice : Les exercices le plus importants, résolus en SolEx.
Exercice : Fait pendant le TD.
Exercice : La partie soulignée faite pendant le TD.
Exercice : A faire à la maison.
Exercice* : Pour ceux qui sont intéressés, mais pas nécessaires pour la réussite dans cet UE.

La règle de l'Hôpital

Exercice 1. En utilisant la règle de l'Hôpital, trouver les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{2x}$.
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{6x - \sin(x)}{x^2 \sin(2x)}$.
3. $\lim_{x\to 1} (2x-1)^{\frac{1}{x-1}}$.

Exercice 2. En utilisant la règle de l'Hôpital, trouver les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)\cdot \ln(1-x)}{e^x - 1}$.
2. $\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2x}\right)^{3x}$.
3. $\lim_{x\to 0} \cos(2\pi x)^{\frac{1}{x}}$.

Fonctions équivalentes, négligeables ou dominées

Exercice 3. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

1. $x^2 + x \underset{x\to 0}{\sim} x$.
2. $x^2 + x \underset{x\to +\infty}{\sim} x$.
3. $x^2 = \underset{x\to 0}{o}(x)$.
4. $x = \underset{x\to 0}{o}(x)$.
5. $1 = \underset{x\to 0}{o}(x)$.
6. $x^2 = \underset{x\to 1}{o}(x)$.
7. $1 = \underset{x\to 1}{o}(x)$.
8. $x^2 = \underset{x\to +\infty}{o}(x)$.
9. $x^2 = \underset{x\to 0}{O}(x)$.
10. $x = \underset{x\to 0}{O}(x)$.
11. $1 = \underset{x\to 0}{O}(x)$.
12. $x^2 = \underset{x\to 0}{O}(\frac{1}{2}x^2)$.
13. $x = \underset{x\to +\infty}{o}(x)$.
14. $x^5 + x^2 + x = \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)$.
15. $x^5 + x^2 + x = \underset{x\to 0}{o}(x)$.
16. $e^x = \underset{x\to +0}{o}(\ln(|x|))$.
17. $2x + 1 = \underset{x\to +\infty}{o}(x)$.
18. $x^2 = \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.

Exercice 4. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

1. $\sin(x) = \underset{x\to 0}{o}(x)$,
2. $\sin(x) = \underset{x\to +\infty}{o}(x)$,
3. $2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2} = \underset{x\to 0}{o}(x)$,
4. $\ln(|x|) = \underset{x\to 0_+}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Exercice 5. Donner un équivalent simple des fonctions suivantes :

1. $x^4 + 5x^2 - 6x$ en 0 et en $+\infty$.
2. $\sqrt{x} + \ln(x)$ en 0 et $+\infty$.
3. $x + \sin(x)$ en 0 et $+\infty$.
4. $x^7 + \sqrt{x} + \ln(x)^2 + e^{2x} + 4x^5 + 5^{x+1}$ en $+\infty$.

Exercice 6. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

1. $e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1$.
2. $e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1 + 2x$.
3. $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} 0$.
4. $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$.
5. $e^{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} 1 + x$.
6. $e^{x^2} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$.

Les développements limités (surtout en 0)

On rappelle la formule de Taylor-Young. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur l'intervalle ouvert I et soit $a \in I$. Alors pour tout $x \in I$, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + o\left((x-a)^n\right).$$

Si $a = 0$, on en obtient en particulier :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + o\left(x^n\right).$$

Si la fonction f s'exprime sous la forme d'une fraction dont le dénominateur s'annule en $x = 0$, comme $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, on effectue le développement au nominateur et au dénominateur séparément dans un premier temps et on simplifie ensuite par la puissance commune maximale de x. Dans le cas où il ne reste plus de terme singulier (comme $\frac{1}{x}$) dans l'expression simplifiée ainsi obtenue, on a simultanément prouvé l'existence d'un prolongement continu en 0 pour f et obtenu le développement limité autour de 0 dudit prolongement (ce qui fournit en particulier la valeur en 0 du prolongement continu). Dans l'exemple, on a $f(x) = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^4)$, où 1 est la valeur de f obtenue par un tel prolongement.

Exercice 7. Donner par un calcul direct le développement limité en 0 à l'ordre 2 pour les fonctions suivantes :

1. $3 + \ln\left(1 + x + x^2\right)$.
2. $\exp(\cos(x))$.
3. $1 + \tan(x)$.

Exercice 8. Donner par un calcul direct puis en utilisant le formulaire un développement limité en 0 à l'ordre 3 pour les fonctions suivantes :

1. $\ln(3\cos(x))$.
2. $\sqrt{1 + \exp(2x)}$.

Exercice 9. En utilisant le formulaire, donner le développement limité en 0 à l'ordre 2 pour les fonctions suivantes :

1. $\ln(2 + x)$.
2. $\frac{1}{2+x}$.
3. $\sqrt{2 + x}$.

Exercice 10. En utilisant le formulaire, donner le développement limité en 0 à l'ordre 2 pour les fonctions suivantes :

1. $\ln(3-x)$.
2. $\dfrac{1}{3+x}$.
3. $\sqrt{4+x}$.

Exercice 11. En utilisant le formulaire, donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 pour les fonctions suivantes :

1. $\ln(1+x)\sin(x)$.
2. $\ln(1+\sin(x))$.
3. $\dfrac{\sin(x)}{1+\ln(1+x)}$.

Exercice 12. En utilisant le formulaire, donner le développement limité à l'ordre 4 pour les fonctions suivantes :

1. $\ln(1+x)\cos(x)$.
2. $\ln(1+\cos(x))$.
3. $\dfrac{\cos(x)}{1+\ln(1+x)}$.

Exercice 13. En utilisant le formulaire, donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 pour les fonctions suivantes :

1. $(1-x)^3$.
2. $\dfrac{\sin(x)-x}{x^3}$.
3. $\dfrac{\ln(1+x)}{e^x\sin(x)}$.
4. $(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 14. En utilisant le formulaire, donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 pour les fonctions suivantes :

1. $(1-x)^4$.
2. $\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.
3. $\dfrac{\ln(1+x)}{e^x\cos(x)}$.
4. $(1+x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Exercice 15. Si elles existent, calculer les limites suivantes en utilisant un développement limité :

1. $\lim_{x\to 0}\dfrac{6x-\sin(x)}{x^2+\sin(2x)}$.
2. $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}$.
3. $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos(x)}{x^2}$.
4. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)-\ln(1+\sin(x))}{x^2}$.

Exercice 16. Si elles existent, calculer les limites suivantes en utilisant un développement limité :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos(x)-x}{\ln(1+\sin(x))-x}$.
2. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin(x)^4}\left(\sin\left(\dfrac{x}{1+x}\right)-\dfrac{\sin(x)}{1+\sin(x)}\right)$.

Exercice 17.

1. Donner le développement limité à l'ordre 3 de $x^2\ln(x)$ au voisinage de $x=1$.
2. Donner le développement limité à l'ordre 3 de $\sin(x)$ au voisinage de $x=\frac{\pi}{4}$.

Exercice 18.

1. Donner le développement limité à l'ordre 3 de $e^{\sqrt{x}}$ au voisinage de $x=1$.
2. Donner le développement limité à l'ordre 4 de $\cos(x)$ au voisinage de $x=\frac{\pi}{4}$.

Exercice* 19.
Considérer la fonction $f\colon \left[1,+\infty\right[\to \mathbb{R}, x \mapsto e^{1/x}\sqrt{x^2-1}$.

1. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

2. En déduire que la droite $y = x+1$ est asymptote au graphe de f au voisinage de $+\infty$.

Exercice 20.
Considérer la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt{1+x+x^2}$.

1. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

2. En déduire que la droite $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote au graphe de f au voisinage de $+\infty$.

Quelques applications de la formule de Taylor-Lagrange

On rappelle la formule de Taylor-Lagrange. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(b-a)^k}{k!} + \frac{(b-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Exercice 21 (CF 2023)**.**

1. Montrer que pour tous réels x et y,

$$|\cos y - \cos x| \leq |y-x|.$$

2. En déduire que $\cos(0.01) \geq 0.99$.
3. Écrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction cos à l'ordre 3 entre 0 et x.
4. En déduire une valeur approchée de $\cos(0.01)$ à 10^{-8}.

Exercice 22.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, écrire la formule de Taylor-Lagrange pour cos à l'ordre n entre 0 et x.
2. En déduire une valeur approchée de $\cos\left(\frac{\pi}{32}\right)$ à 10^{-5} près.

Exercice 23.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, écrire la formule de Taylor-Lagrange pour sin à l'ordre n entre 0 et x.
2. En déduire une valeur approchée de $\sin\left(\frac{\pi}{32}\right)$ à 10^{-5} près.

$\boxed{\textbf{Exercice}}$ **24.** On considère $f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(1+x)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in]0,+\infty[$, écrire la formule de Taylor-Lagrange pour f à l'ordre n entre 0 et x.
   Indication : Montrer, que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$.
2. Montrer que, pour tout $x > 0$, on a :
$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\,.$$
3. En déduire une valeur approchée de $\ln(1,003)$ à 10^{-8} près.
4. En utilisant la question 2, montrer que pour tout $x > 0, \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp(x)$.

<u>**Exercice**</u> **25.**

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, écrire la formule de Taylor-Lagrange pour exp à l'ordre n entre 0 et 1.
2. En déduire que pour $n \geq 2$:
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}.$$
3. Montrer que e est irrationnel.
   Indication : Supposer par l'absurde que $e = \frac{p}{q}$ pour $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ et appliquer la question 1) pour un entier n bien choisi.

Exercice* **26.** Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que f'' n'est pas majorée par 4 .

Exercice* **27.** (Inégalité de Komolgorov) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On suppose que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$ et on note $M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h > 0$, on a
$$|f'(x)| \leq \frac{2}{h} M_0 + \frac{h}{2} M_2.$$
2. En déduire que f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et que
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \leq 2M_0M_2.$$

Formulaire de développement limités

Les développements limités ci-dessous sont valables quand **x tend vers 0** et uniquement dans ce cas.

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o\left(x^n\right)$$

$$\text{ch}x \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n}\right) \quad \left(\text{et même } o\left(x^{2n+1}\right) \text{ et même } O\left(x^{2n+2}\right)\right)$$

$$\text{sh}x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \quad \left(\text{et même } o\left(x^{2n+2}\right) \text{ et même } O\left(x^{2n+3}\right)\right)$$

$$\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right)$$

$$\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n}\right) \quad \left(\text{et même } o\left(x^{2n+1}\right) \text{ et même } O\left(x^{2n+2}\right)\right)$$

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \quad \left(\text{et même } o\left(x^{2n+2}\right) \text{ et même } O\left(x^{2n+3}\right)\right)$$

....

$$(1+x)^a \underset{x\to 0}{=} 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n + o\left(x^n\right) \quad (a \text{ réel donné})$$

$$\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} x^k + o\left(x^n\right) \text{ et en particulier } (1+x)^a \underset{x\to 0}{=} 1 + ax + o(x) \text{ et donc } \sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$$

....

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + o\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o\left(x^n\right)$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o\left(x^n\right)$$

$$\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} + \ldots - \frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o\left(x^n\right)$$

$$\text{Arctan}x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right) \quad \left(\text{et même } o\left(x^{2n+2}\right) \text{ et même } O\left(x^{2n+3}\right)\right)$$

Les développements en 0 de Arcsin et de tan et th ne font pas partie du cours mais constituent une activité classique en classe préparatoire.

Formulaire d'équivalents usuels

$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x, \qquad \ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$$

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} \text{sh}\,(x) \underset{x\to 0}{\sim} \tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} \text{th}\,(x) \underset{x\to 0}{\sim} \arcsin(x) \underset{x\to 0}{\sim} \arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2},\ \text{ch}\,(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

$$\arccos(x) \underset{x\to 1,\ x<1}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x},$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x,\ (\alpha \neq 0)$$

$$\frac{1}{1-x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x,\ \sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$$

$$\text{ch}\,(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \text{sh}\,(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$$

Les théorèmes de croissances comparées

$$\forall a > 1,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ x^\alpha \underset{x\to +\infty}{=} o(a^x)$$
$$\forall q > 1,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ n^\alpha \underset{n\to +\infty}{=} o(q^n)$$
$$\forall a \in]0,1[,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ a^x \underset{x\to +\infty}{=} o(x^\alpha)$$
$$\forall q \in]0,1[,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ q^n \underset{n\to +\infty}{=} o(n^\alpha)$$
$$\forall a > 1,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ a^x \underset{x\to -\infty}{=} o(|x|^\alpha)$$

$$\forall a > 1,\ \forall \alpha > 0,\ \forall \beta \in \mathbb{R},\ \log_a^\beta(x) \underset{x\to +\infty}{=} o(x^\alpha)$$
$$\forall a > 1,\ \forall \alpha > 0,\ \log_a^\beta(x) \underset{x\to 0,\ x>0}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \text{ (ou encore } x^\alpha \log_a^\beta(x) \underset{x\to 0,\ x>0}{\to} 0)$$

Quand n tend vers $+\infty$,

$$1 \ll \ln(\ln(n)) \ll \ln(n) \ll \sqrt[3]{n} \ll \sqrt{n} \ll n \ll n\ln(n) \ll n\sqrt{n} \ll n^2 \ll (1,01)^n \ll n! \ll n^n$$

et aussi,

$$1 \gg \frac{1}{\ln(\ln(n))} \gg \frac{1}{\ln(n)} \gg \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \gg \frac{1}{\sqrt{n}} \gg \frac{1}{n} \gg \frac{1}{n\ln(n)} \gg \frac{1}{n\sqrt{n}} \gg \frac{1}{n^2} \gg \frac{1}{(1,01)^n} \gg \frac{1}{n} \gg \frac{1}{n^n}$$