Université Claude Bernard Lyon 1

Analyse2 INFO, printemps 2024

Fiche TD n°3

Intégration

Exercice : Fait pendant l'ES.
Exercice : Fait pendant le TD.
Exercice : À faire à la maison.
Exercice* : Pour ceux qui sont intéressés, mais pas nécessaires pour la réussite dans cet UE.

Exercices de révision

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^3 x^2 \,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_1^3 x^{-2} \,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_{-3}^{-1} x^{-1} \,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x} \,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_2^4 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x$;
9. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}^3} + \cos x \,\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} 1 + \frac{\cos(2x)}{2} \,\mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int_1^3 \tfrac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int_1^4 \tfrac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$

Intégrations par parties

Exercice 2. Une primitive de $\ln x$ est $x \ln x - x$. Soit $\alpha \in]0;1[$.

1. Calculer $\displaystyle\int_\alpha^1 \ln(x) \,\mathrm{d}x$ à l'aide de la primitive de $\ln x$.
2. Confirmer ce calcul d'intégrale par IPP.

Exercice 3. En utilisant l'intégration par parties, évaluer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 x e^x \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_1^e x^2 \ln x \mathrm{d}x$

Exercice 4. En utilisant l'intégration par parties, évaluer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \arctan(x) \,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_1^2 (\ln x)^2 \,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_1^2 \sin(\ln x) \,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x \sin x \,\mathrm{d}x$

Exercice 5. En utilisant l'intégration par parties, évaluer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2} \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^1 x(\arctan x)^2 \mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} e^x \sin x \,\mathrm{d}x$

Indication : pour l'exercice 5 2., on proposera d'utiliser $\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)$ comme primitive de x.

Exercice 6. En utilisant l'intégration par parties, évaluer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 (x^2+x-1)e^x \,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (x^2 - \frac{\pi x}{2} + 2) \cos x \,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_1^2 x^3 \ln x \,\mathrm{d}x$

Exercice 7 (CCF 2022)**.** Évaluer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \, \sin(x) \,\mathrm{d}x \, .$$

Exercice 8. Calculer les intégrales suivantes :

1. $C(\alpha) = \displaystyle\int_0^\alpha \cos^2(x)\mathrm{d}x$
2. $S(\alpha) = \displaystyle\int_0^\alpha \sin^2(x)\mathrm{d}x$

   Pour la suite de l'exercice, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x$.

3. Montrer par un changement de variables que (W_n) peut aussi s'écrire $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\mathrm{d}x$
4. En effectuant une intégration par parties, trouver une relation de récurrence entre W_n et W_{n-2}.
5. Calculer W_n en fonction de n et donner les valeurs de W_n pour $n \in [0, \dots, 3]$ en vérifiant que $W_2 = S(\frac{\pi}{2}) = C(\frac{\pi}{2})$.

Changements de variables

Exercice 9. En effectuant un changement de variables, calculer :

1. Avec le changement de variable $u = \ln x$, calculer $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}\,\mathrm{d}x$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Avec le changement de variable $u = e^x$, calculer : $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x$.
3. Avec le changement de variable $u = x^2$ (est-ce une bijection ?) calculer $\displaystyle\int_{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} 2x\cos x^2\,\mathrm{d}x$.

Exercice 10. Évaluer l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{3\cos x - 1}\mathrm{d}x$$

Exercice 11. Posons les intégrales suivantes : $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x$.

1. Calculer $I + J$
2. Calculer $I - J$
3. En déduire les valeurs de I et J

Exercice 12. En utilisant un changement de variable, évaluer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x - 1}\,\mathrm{d}x$

Exercice 13. En utilisant un changement de variable, évaluer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln(x))}{x}\,\mathrm{d}x$

Exercice 14. Soit $f\colon [-a, a] \to \mathbb{R}$ une fonction continue impaire. Montrer que

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Exercice 15. Évaluer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Intégrales de fractions rationnelles

Exercice 16 (CC 2023).

1. Donner la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de la fraction rationnelle suivante :
$$\frac{X}{(X+1)(X-2)}.$$
2. Calculer
$$3\int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x-2)}\mathrm{d}x\,.$$

Exercice 17 (CF 2022).

1. Factoriser sur $\mathbb{R}$ le polynôme suivant.
$$P(X) = X^3 - X^2 + X - 1$$
2. Donner la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de la fraction rationelle suivante.
$$F(X) = \frac{3X+1}{X^3 - X^2 + X - 1}$$
3. Calculer
$$I = \int_2^3 F(x)\mathrm{d}x\,.$$

Exercice 18 (CF 2023).

1. Donner la forme de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de la fraction rationnelle suivante :
$$\frac{X-1}{X^2(X^2+1)}.$$
2. Donner toutes les primitives de la fonction $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2(x^2+1)}$, c'est-à-dire, déterminer
$$\int \frac{x-1}{x^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$$
pour $x \neq 0$.

Exercice 19. Évaluer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{2}{x(x+2)}\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x(x-1)^3}\mathrm{d}x$

Exercice 20 (CC 2022).

Le but de cet exercice est de déterminer
$$I = \int_{-5}^0 \frac{x^2+6x-1}{x^3+x^2-7x-15}\,\mathrm{d}x.$$

1. Factoriser $P(X) = X^3 + X^2 - 7X - 15$.
2. Décomposer $F(X) = \dfrac{X^2+6X-1}{X^3+X^2-7X-15}$ en éléments simples.
3. Calculer I.
4. (Bonus) Réécrire le résultat obtenu au point précédent pour éliminer arctan.

Exercice 21. Évaluer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x-2}{x^3+x}\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{-x+1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3-17x}{x^3+3x^2+3x+1}\mathrm{d}x$

Exercice 22. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_2^3 \frac{x+1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$$

Exercice 23. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2-1)}$
2. $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^4+1}{x(x-1)^3}\mathrm{d}x$

Exercice 24. Soit, $f(x)\colon]1,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}$. Trouver toutes les primitives de f.

Exercice 25.

1. Déterminer $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$.
2. En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{\frac{-\sqrt{3}-2}{4}}^{\frac{\sqrt{3}-2}{4}} \frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$.

Indication : on pourra se servir du fait que $\arctan(a)-\arctan(b)=\arctan(\frac{a-b}{1+ab})$, $\forall a,b \in]-1,1[$.

Divers

Exercice 26 (CF 2023)**.** Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^2 x^3 \ln x \,\mathrm{d}x\,;$
2. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 27 (CC 2022)**.** Évaluer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^1 e^x(3x^2-x+1)\mathrm{d}x\,.$

Exercice 28. Évaluer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{1}{e^x+1}\mathrm{d}x$

Exercice 29 (CC 2023)**.** Calculer

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Indication : Utiliser le changement de variable $x=\sin u$.

Intégration à l'aide de la définition initiale

Exercice* 30. On considère la fonction $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$.

1. Sans faire de calcul, et grâce à des considérations géométriques, montrer que

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1/2.$$

2. On se propose de retrouver ce résultat en faisant appel à la définition de l'intégrale de Riemann. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit les fonctions en escalier u_n et v_n sur $[0,1]$ par

$$\forall k \in \{0, \ldots, n-1\},\ \forall x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[, \quad u_n(x) = f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ et } v_n(x) = f\left(\frac{k+1}{n}\right),$$

et $u_n(1) = v_n(1) = 1$. Faire un dessin des fonctions f, u_n et v_n. Montrer que, par définition de l'intégrale de Riemann,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n} \leq \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{n}.$$

3. En faisant tendre n vers $+\infty$, en conclure que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1/2$
4. Finalement, retrouver le résultat encore une fois en faisant appel au théorème fondamental de l'analyse.

Formulaire : Dérivées et primitives Usuelles

f' désigne la dérivée de f sur l'ensemble de dérivabilité D.

$f(x)$	$f'(x)$	D	$(f\circ u)'$
C	0	$\mathbb{R}$	
$x^a \quad (a\in\mathbb{R})$	ax^{a-1}	$\mathbb{R}$ si $a\in\mathbb{N}$, $\mathbb{R}^*$ si $a\in\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{R}_+^*$ sinon.	$(u^a)'=u'\times au^{a-1}$
dont : $\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$	$(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	$(e^u)'=u'e^u$
$\ln(\lvert x\rvert)$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\ln(\lvert u\rvert)'=\frac{u'}{u}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	$(\cos u)'=-u'\sin u$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$(\sin u)'=u'\cos u$
$\tan x$	$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$	$(\tan u)'=u'(1+\tan^2 u)=\frac{u'}{\cos^2 u}$
$\mathrm{ch}\,x$	$\mathrm{sh}\,x$	$\mathbb{R}$	$(\mathrm{ch}\,u)'=u'\,\mathrm{sh}\,u$
$\mathrm{sh}\,x$	$\mathrm{ch}\,x$	$\mathbb{R}$	$(\mathrm{sh}\,u)'=u'\,\mathrm{ch}\,u$
$\mathrm{th}\,x$	$1-\mathrm{th}^2 x=\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	$\mathbb{R}$	$(\mathrm{th}\,u)'=u'(1-\mathrm{th}^2 u)=\frac{u'}{\mathrm{ch}^2 u}$
$\mathrm{Arctan}\,x$	$\frac{1}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$	$(\mathrm{Arctan}\,u)'=\frac{u'}{u^2+1}$
$\mathrm{Arcsin}\,x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$	$(\mathrm{Arcsin}\,u)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\mathrm{Arccos}\,x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$	$(\mathrm{Arccos}\,u)'=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

F désigne une primitive de f sur l'intervalle I.
C désigne une constante (qui DÉPEND de I).

$f(x)$	$F(x)$	I
$x^a \quad (a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\})$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}+C$	$\mathbb{R}$ si $a\in\mathbb{N}$, $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ si $a\in\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{R}_+^*$ sinon.
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+C$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$e^{\alpha x} \quad (\alpha\in\mathbb{C}^*)$	$\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}+C$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x+C$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x+C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$ ou $1+\tan^2 x$	$\tan x+C$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$
$\mathrm{ch}\,x$	$\mathrm{sh}\,x+C$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{sh}\,x$	$\mathrm{ch}\,x+C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$ ou $1-\mathrm{th}^2 x$	$\mathrm{th}\,x+C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\mathrm{Arctan}\,x+C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{Arcsin}\,x+C$ ou $-\mathrm{Arccos}\,x+C$	$]-1,1[$

Se souvenir que
- si u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I, une primitive de $f=u'\times v'(u)$ est $F=v\circ u+C$.
- $\int u'v=uv-\int uv'$ (intégration par parties).
- Si φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I, en notant $x=\varphi(t)$, $\mathrm{d}x=\varphi'(t)\mathrm{d}t$ et $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\varphi'(t)f(\varphi(t))\mathrm{d}t$ (changement de variable).