Université Claude Bernard Lyon 1

ANALYSE2 INFO, printemps 2024

Fiche TD n°1bis,

Dérivabilité, Accroissements finis.

$\boxed{\textbf{Exercice}}$: Exercice d'importance particulière, fait en SolEx.
Exercice : Fait pendant le TD
Exercice : Partie soulignée faite pendant le TD
Exercice : A faire à la maison/pour votre entraînement.
Exercice* : Intéressant, mais pas nécessaire pour la réussite dans cette UE.

Calcul des dérivées

Exercice 1. Pour chacune des expressions $f(x)$ ci-dessous, calculer $f'(x)$ (pour tout x où la fonction est dérivable) :

1. $x^4 + 3x^2 - 6$
2. $6x^{7/2} + 4x^{5/2} - 2x$
3. $\sqrt{3x} + \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x}$
4. $x\,(x+3)\,e^x$
5. $\dfrac{x^3+1}{x^2-x-2}$
6. $\dfrac{\ln x}{x^3}$
7. $(x+1)^3\sqrt{x}$
8. $\dfrac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}}$
9. $\dfrac{\cos x}{\sin x}$

Exercice 2. Pour la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ci-dessous, calculer la fonction dérivée f'.

$$f(x) = \ln\left(\frac{(3x^2+2)^3}{(1+\sin^2 x)\exp\left(\dfrac{\arctan x}{1+x^2}\right)}\right)$$

Indication: : Simplifier avant de dériver.

Exercice 3.

1. Déterminer la dérivée de la fonction arctan en utilisant la formule

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}},$$

valable pour toute fonction dérivable f dans les régions où f' (en fait $f' \circ f^{-1}$) est non nulle. (Comment trouvez-vous cette égalité ? — Pour simplifier, en supposant que f^{-1} est différentiable.)
Rappel : Par définition, arctan est la fonction réciproque de la fonction $\tan|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$, la fonction qui est elle-même la restriction de la fonction tan à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

2. Trouver également la dérivée de la fonction arcsin, définie sur l'intervalle ouvert $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.
Rappel : Par définition, arcsin est la fonction réciproque de la fonction $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$.

Exercice 4. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Calculer $\lim_{x\to a} \dfrac{a\,f(x) - x\,f(a)}{x-a}$, pour un $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. En utilisant que la derivée de la fonction sin est la fonction cos, calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$.

Dérivabilité

Exercice 6. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ et définissons $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x & \text{si } x < 0, \\ \beta & \text{si } x = 0, \\ \gamma x + \delta & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*)$ en calculant toutes ses dérivées pour $x \neq 0$.
2. Calculer $\lim_{x \to 0_-} f'(x)$ (pour tous les α, β, γ, et δ dans $\mathbb{R}$).
3. Calculer $\lim_{x \to 0_+} f'(x)$.
4. Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour α, β, γ et δ afin que
   (a) $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.
   (b) $f'_g(0)$ existe et la calculer dans ce cas.
   (c) $f'_d(0)$ existe et la calculer dans ce cas.
   (d) $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R})$.
   (e) $f \in \mathcal{C}^5(\mathbb{R})$.

Rappel : $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ si—par définition—f est continue sur $\mathbb{R}$.
$f'_g(0)$ et $f'_d(0)$ dénotent la dérivée de f respectivement à gauche et à droite en 0.
$f \in \mathcal{D}^n(\mathbb{R})$ si—par définition—f est n fois dérivable.
$f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ si—par définition—on a $f \in \mathcal{D}^n(\mathbb{R})$ et sa n-ième dérivée appartient à $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

Exercice 7 (CC 2023, sauf 4. et 5.)**.** Définissons $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \geq 0, \\ x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue ?
2. La fonction f est-elle dérivable ? Si oui, sa dérivée est-elle continue ?
3. La fonction f est-elle deux fois dérivable ? Si oui, sa deuxième dérivée est-elle continue ?
4. Quel est le $n \in \mathbb{N}$ maximal tel que $f \in \mathcal{D}^n(\mathbb{R})$?
5. Quel est le $n \in \mathbb{N}$ maximal tel que $f \in C^n(\mathbb{R})$?
6. Calculer
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

Exercice 8. Définissons $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \arctan x & \text{si } x \geq 0, \\ x + x^2 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue ?
2. La fonction f est-elle dérivable ? Si oui, sa dérivée est-elle continue ?
3. La fonction f est-elle deux fois dérivable ? Si oui, sa deuxième dérivée est-elle continue ?
4. Quel est le $n \in \mathbb{N}$ maximal tel que $f \in \mathcal{D}^n(\mathbb{R})$?
5. Quel est le $n \in \mathbb{N}$ maximal tel que $f \in C^n(\mathbb{R})$?

Exercice 9. Soit f la fonction réelle d'une variable réelle définie par :

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ \sin x & \text{si } x \leq 0 \end{cases} . \end{array}$$

1. Montrer que f est dérivable en tout point x de $\mathbb{R}^*$ en calculant sa dérivée.
2. f est-elle dérivable en 0 ?
3. f' est elle continue en 0 ?
4. f est-elle deux fois dérivable en 0 ?
5. f est-elle trois fois dérivable en 0 ?
6. Quel est le $n \in \mathbb{N}$ maximal tel que $f \in C^n(\mathbb{R})$?

<u>Exercice</u> 10. Soit $N \in \mathbb{N}$. On définit $f_N \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_N(x) = \begin{cases} x^N \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases} .$$

Pour quelles valeurs de N,

1. f_N est-elle continue ?
2. f_N est-elle dérivable ?
3. f_N' est-elle continue ?
4. f_N' est-elle dérivable ?
5. Quel est le $n \in \mathbb{N}$ maximal tel que $f_3 \in \mathcal{D}^n(\mathbb{R})$?
6. Quel est le $n \in \mathbb{N}$ maximal tel que $f_3 \in C^n(\mathbb{R})$?
7. A-t-on $\lim_{x \to 0_-} f_2'(x) = (f_2)_g'(0)$?

Exercice 11. Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^x - x & \text{si } x < 0 \\ \cos^2(\pi x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + \frac{\ln x}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} . \tag{1}$$

Exercice[*] 12. Soit f la fonction réelle d'une variable réelle définie par :

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \exp(-1/x^2) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} . \end{array}$$

Montrer que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Exercice **13** (CC 2023).

On considère la fonction $f \colon]-1, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \arcsin(x) & \text{si } -1 < x < 0, \\ x e^x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue ?
2. La fonction f est-elle dérivable ? Si oui, sa dérivée est-elle continue ?
3. La fonction f est-elle deux fois dérivable ? Si oui, sa dérivée seconde est-elle continue ?

Des accroissements finis

Exercice 14.
Montrer que 100 est une approximation de $\sqrt{10001}$ avec une erreur d'approximation inférieure à 0.005.

Exercice 15.

1. Montrer que pour tous réels x et y : $|\cos y - \cos x| \leq |y - x|$.
2. En déduire que $\cos(0.01) \geq 0.99$.
3. * Montrer que pour tous réels x et y tels que $x \neq y$: $|\cos y - \cos x| < |y - x|$.
   Indication : Si $|y - x| > 2$, c'est trivial. Pour $|y - x| \leq 2$, il y a au plus un $z \in E := \{\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$ dans l'intervalle I entre x et y. S'il y en a pas, c'est facile car $|\sin \xi| < 1$ pour tout $\xi \in I$. Autrement, utiliser $|\cos y - \cos x| \leq |\cos y - \cos z| + |\cos z - \cos x|$.

Exercice 16.

1. Montrer que pour tous réels a et b avec $0 \leq a < b$:
$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}.$$
2. En déduire que :
$$\frac{12}{25} < \arctan\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{4}{3}.$$
3. Pour un autre choix de a, en déduire que l'on a même :
$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \arctan\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}.$$

Exercice 17.

1. Montrer que pour tous réels a et b avec $0 \leq a < b < 1$:
$$\frac{b-a}{\sqrt{1-a^2}} < \arcsin b - \arcsin a < \frac{b-a}{\sqrt{1-b^2}}.$$
2. En déduire que :
$$\frac{3}{5} < \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) < \frac{3}{4}.$$
3. Pour un autre choix de a, en déduire que l'on a même :
$$\frac{\pi}{6} + \frac{1}{5\sqrt{3}} < \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) < \frac{\pi}{6} + \frac{1}{8}.$$

Exercice 18.

1. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$: $0 < \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$.
2. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.
3. Déterminer $\lim_{n\to\infty} H_n$ où $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

$\boxed{\textbf{Exercice}}$ **19.** Soit f la fonction définie par $f(x) = x\ln x - x$.

1. En appliquant à f le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $n \geq 1$, on a :
$$\ln n < f(n+1) - f(n) < \ln(n+1).$$
2. En déduire que pour tout $n \geq 1$, on a :
$$\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n < f(n+1) + 1 < \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln(n+1).$$
3. En déduire que pour tout $n \geq 1$, on a :
$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

Exercice 20.

1. Utiliser l'exercice 18 pour montrer que pour $\alpha \leq 1$
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \infty.$$
2. On suppose maintenant $\alpha > 1$. Pour $k \geq 2$, comparer $\dfrac{\alpha-1}{k^\alpha}$ et $\dfrac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{k^{\alpha-1}}$.

   Indication: : Appliquer le TAF à la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$.
3. Toujours pour $\alpha > 1$, montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \ell, \text{ avec } \ell < \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$