Université Claude Bernard Lyon 1 — **Semestre printemps 2024**

L1 — UE : Analyse 2 (INFO)

Contrôle continu du 16 avril 2024

Durée : 60 minutes

Tous documents, téléphones, calculatrices, ordinateurs ainsi que toute communication avec les autres participants à l'examen sont strictement interdits. Les infractions peuvent entraîner des conséquences sévères.

Toutes les réponses doivent être justifiées.
Tous les résultats doivent être simplifiés au maximum.
Le nombre total de points obtenus formera une note sur 20.

Exercice 1 (4 points)

Donner l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la récurrence

$$u_{n+2} = -u_{n+1} + 20u_n\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

pour des conditions initiales $u_0 = 2$ et $u_1 = -1$.

Solution 1

$$u_n = 4^n + (-5)^n$$

Exercice 2 (9 points)

a. (3 pts) Trouver toutes les primitives $\int x^2 \sin x \,\mathrm{d}x$.

b. (6 pts) Résoudre l'équation différentielle

$$y' + \frac{x}{1+x^2}y = \sqrt{1+x^2}\sin x$$

pour la condition initiale $y(0) = 2$.

Solution 2

$$\int x^2 \sin x \mathrm{d}x = (2-x^2)\cos x + 2x\sin x + C$$

$$y(x) = \frac{(1-x^2)\cos x + 2x\sin x + 1}{\sqrt{1+x^2}}$$

<u>Exercice 3</u> (7 points)

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 13y = 20e^x + 26$$

pour les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Indication: On commencera par résoudre l'équation homogène, puis par donner une solution particulière associée à chacun des deux termes du membre de droite, avant de conclure.

Solution 3

$$y(x) = e^{2x}\left[2\sin(3x) - 4\cos(3x)\right] + 2(e^x + 1)$$

<u>Exercice 4</u> (4 points)

a. (2 pts) Obtenir, à l'aide de la formule de Taylor sans recourir au formulaire, le développement limité en 0 jusqu'à l'ordre 3 pour la fonction f,

$$f(x) = \ln(1 - x)\,.$$

b. (2 pts) Déterminer la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}\,.$$

Indication: Vous êtes libre d'utiliser plusieurs fois la règle de l'Hôpital ou de recourir à un développement limité (utilisation du DL de sin sans preuve) pour obtenir le résultat.