**Université Claude Bernard Lyon 1** — **Semestre printemps 2024**

L1 — UE : Analyse 2 (INFO)

---

**Contrôle continu du 13 février 2024**

Durée : 60 minutes

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Le nombre total de points obtenus formera une note sur 20.

Toutes les réponses doivent être justifiées.

---

## Question du cours (2 points)

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

**a.** (1 pt) Que doit satisfaire la fonction $f$ pour qu'elle soit *dérivable à gauche* en $x = 3$ ?

**b.** (1 pt) Que doit satisfaire $f$ pour qu'elle soit une *fonction contractante* ?

## Exercice 1 (6 points)

Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^x - x & \text{si } x < 0 \\ \cos^2(\pi x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 + \frac{\ln x}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} . \tag{1}$$

*Indication :* On admet que $f \in C^\infty(\mathbb{R}\backslash\{0,1\})$. Il suffit donc de regarder $x = 0$ et $x = 1$ et de répondre pour chacun des deux points si la fonction y est continue (1+1 points) et si elle y est même dérivable (2+2 points).

## Exercice 2 (6 points)

**a.** (1 pt) Énoncer le théorème des accroissements finis (TAF).

**b.** (2 pts) Montrer que $\sin(0.01) \leqslant 0.01$.

**c.** (3 pts) Montrer les inegalités

$$\frac{\pi}{3} + \frac{3-\sqrt{3}}{10} \leqslant \arctan(3) \leqslant \frac{\pi}{3} + \frac{3-\sqrt{3}}{4}.$$

*Indication :* $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$.

## Exercice 3 (8 points)

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 4x + 6$ et soit $I = [\frac{7}{4}, \frac{9}{4}]$.

**a.** (2 pts) Déterminer l'extremum local $x_{\min}$ de la fonction $f$ et ses deux points fixes. Dessiner le graphe de la fonction $f$.

**b.** (2 pts) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que la fonction $f$ est contractante sur $I$.

**c.** (2 pts) Calculer l'image $f(I)$ et en déduire que $I$ est stable par rapport à $f$.

**d.** (2 pts) Définissons une suite récurrente par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = \frac{7}{4}$.
Déterminer $\lim_{n\to\infty} u_n$.