Université Claude Bernard Lyon 1

ALGÈBRE 2 INFO, printemps 2024

Fiche TD n°3,

Applications Linéaires – première partie

$\boxed{\textbf{Exercice}}$: Fait pendant l'ES
Exercice : Fait pendant le TD
Exercice : Partie soulignée faite pendant le TD
Exercice : A faire à la maison.
Exercice* : Des exercices plus compliqués ou abstraits (pour ceux qui sont intéressés, mais pas nécessaires pour la réussite dans cette UE).

Des applications linéaires, noyau et image

Exercice 1. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Parmi les applications suivantes, déterminer celles qui sont linéaires :

a) $\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (y,x) \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (x,x+1) \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (x,a) \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (ax,ay) \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (x+a,y+a) \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\longmapsto (x+z,y+z) \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) &\longmapsto (2x,0,x-y) \end{aligned}$

h) $\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sin x \end{aligned}$

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{C}$. On définit $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ par $z \mapsto z + a\bar{z}$. Suivant les valeurs de a, dire si f est $\mathbb{C}$-linéaire ou $\mathbb{R}$-linéaire (c.à.d. une application linéaire de l'espace vectoriel $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ sur le corps $\mathbb{C}$ ou une application linéaire de l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ sur le corps $\mathbb{R}$). Dans le second cas, écrire l'application f comme une application matricielle, c'est-à-dire trouver la matrice A telle que

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x-y, x-y)$.

1. Déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.
2. Est-ce que f est injective ? Est-elle surjective ? Bijective ?
3. Déterminer $\ker f + \operatorname{Im} f$. Est-ce une somme directe ?

Exercice 4. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x+y, x-y)$.

1. Déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.
2. Est-ce que f est injective ? Est-elle surjective ? Bijective ?
3. Déterminer $\ker f + \operatorname{Im} f$. Est-ce une somme directe ?

Exercice 5. On considère $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(e_1) = e_1\,, \quad f(e_2) = -e_1\,, \quad f(e_3) = e_3\,.$$

1. Déterminer l'image par f d'un élément $(x,y,z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$ de $\mathbb{R}^3$ en utilisant la linéarité de l'application$f$.
2. Déterminer le noyau et l'image de f et donner une base de chacun d'eux.
3. A-t-on $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$?
4. Montrer que $f \circ f = f$.

Exercice 6. On considère $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par
$$f(e_1) = e_2\,, \quad f(e_2) = e_2\,, \quad f(e_3) = -e_3\,.$$

1. Déterminer l'image de f.
2. Quel est le rang de f ? Quelle est, en conséquence, la dimension du noyau de f ?
3. Deviner un vecteur dans le noyau de f. En déduire l'ensemble de $\ker f$.
4. A-t-on $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus \mathrm{Im}\ f$?
5. Montrer que $f^2 = f$ (en établissant l'égalité sur les éléments de $\mathcal{E}$).

Exercice 7. On note $\Psi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ l'application définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, par $\Psi(P) = P(X+1) - P(X)$. (Dans cet exercice il est admis qu'un polynôme qui prend la même valeur sur une infinité de points doit être constant.)

1. Montrer que Ψ est linéaire.
2. Déterminer son noyau.
3. En déduire le rang de Ψ.
4. Donner une description simple de l'image de Ψ.
5. Calculer $\mathrm{Im}(\Psi) + \ker(\Psi)$. Est-ce une somme directe ?

Exercice 8. Déterminez lesquelles des applications suivantes sont linéaires et pour celles qui sont linéaires, déterminez leur noyau et leur image.

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R} \quad &, \quad P \mapsto P(2) \\ g\colon \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_4[X] \quad &, \quad P \mapsto P \circ P \\ h\colon \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X] \quad &, \quad P \mapsto XP'(X) \end{aligned}$$

Exercice 9. Soit
$$f\colon\ \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3,\ a + bX + cX^2 \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\ .$$

1. Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$.
2. Est-ce que f est injective, surjective, bijective ?
3. Est-ce que f est un endomorphisme ?
4. Est-ce que f est un isomorphisme ?

Exercice 10. Soit $f\colon \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n, A \mapsto A + A^T$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Est-ce un endomorphisme ?
3. Donner une description simple du noyau et de l'image de f. (De quel ensemble de matrices s'agit-il dans chacun des deux cas ?)
4. Calculer $\mathrm{Im}(f) + \ker(f)$. Est-ce une somme directe ?
5. A-t-on $f^2 = f$?

Exercice 11. Soit $f\colon \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2, A \mapsto \frac{1}{2}(A - A^T)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Est-ce un endomorphisme ?
3. Donner une base du noyau et de l'image de f.
4. Est-ce que f est injective, surjective, bijective ? Est-elle un endomorphisme, un isomorphisme ?

5. Calculer $\mathrm{Im}(f) + \ker(f)$. Est-ce une somme directe ?
6. A-t-on $f^2 = f$?

Exercice 12. Soit $f\colon \mathcal{M}_3 \to \mathcal{M}_3, A \mapsto A + 2A^T$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau de f.
3. En conclure sur le rang de f.
4. Déterminer $\mathrm{Im}\, f$.
5. L'endormophism f, est-il injectif, surjectif, bijectif, un isomorphisme ?

$\boxed{\textbf{Exercice}}$ **13.** Soit E l'espace vectoriel des suites réelles. On considère l'application $\mathcal{L}$ qui à une suite quelconque (u_n) associe la suite (v_n) définie par $v_n = u_{n+1} - 2u_n$.

a) Montrer que $\mathcal{L}$ est une application linéaire.
b) Montrer que les suites de terme général 2^n forment une famille libre de $\ker(\mathcal{L})$.
c) En tenant compte qu'une suite (u_n) de $\ker(\mathcal{L})$ est définie de façon unique par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ montrer que la dimension de $\mathcal{L}$ est 1.
d) Déterminer une base de $\mathcal{L}$.
e) Déterminer la suite de $\ker(\mathcal{L})$ telle que $u_0 = -2$.

Exercice 14. Soit E l'espace vectoriel des suites réelles. On considère l'application $\mathcal{L}$ qui à une suite quelconque (u_n) associe la suite (v_n) définie par $v_n = u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n$. C'est-à-dire, $\mathcal{L}$ est l'application :

$$\mathcal{L}\colon E \to E,\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n)_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

a) Montrer que $\mathcal{L}$ est une application linéaire.
b) Montrer que les suites de terme général $(-1)^n$ et 2^n forment une famille libre de $\ker(\mathcal{L})$.
c) En tenant compte qu'une suite (u_n) de $\ker(\mathcal{L})$ est définie de façon unique par la donnée de $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ montrer que la dimension de $\mathcal{L}$ est 2.
d) Déterminer une base de $\mathcal{L}$.
e) Déterminer la suite de $\ker(\mathcal{L})$ telle que $u_0 = 1$ et $u_1 = -2$.

<u>Exercice</u> 15. Considerons les applications suivantes

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1\colon C^1([0,4]) \to C^0([0,4]) \quad &, \quad f \mapsto 2\cdot f' \\
\mathcal{L}_2\colon C^1([0,4]) \to C^0([0,4]) \quad &, \quad f \mapsto f(2)\cdot f' \\
\mathcal{L}_3\colon C^1([0,4]) \to C^0([0,1]) \quad &, \quad f \mapsto 2 + f' \\
\mathcal{L}_4\colon C^1([0,4]) \to C^0([0,1]) \quad &, \quad f \mapsto f(2) + f' \\
\mathcal{L}_5\colon C^1([0,4]) \to C^0([0,1]) \quad &, \quad f \mapsto f + f'
\end{aligned}$$

1. Lesquelles de ces applications sont linéaires ?
   (Justifiez vos réponses pour un cas positif et un cas négatif).
2. Déterminer le noyau de $\mathcal{L}_1$ et son image. Quelle est la dimension de $\ker \mathcal{L}_1$?
3. Est-ce que $\mathcal{L}_1$ est surjective ? Est-elle injective ? — Peut-on obtenir une telle réponse pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie ?
4. Déterminer $\ker \mathcal{L}_5$ et sa dimension. En donner une base.

<u>Exercice</u> 16. Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

Soient f et g des applications suivantes :

$$\begin{aligned}
f\colon \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2 \quad &, \quad A \mapsto AM - MA \\
g\colon \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2 \quad &, \quad A \mapsto AM + MA
\end{aligned}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer $\ker f$. En particulier, en trouver une base et sa dimension. *Indication*: Utiliser le paramétrage $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ pour transformer $f(A) = 0$ en un système linéaire pour les quatre inconnues a, b, c, d. Le résoudre en utilisant l'algorithme de Gauss.
3. L'endomorphisme f est-il injectif, bijectif, un isomorphisme ?
4. Déterminer $\ker g$. En particulier, en trouver une base et sa dimension.

Exercice 17. Soit
$$M = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$
Soient f et g des applications suivantes :
$$f : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2 \quad , \quad A \mapsto AM - MA$$
$$g : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2 \quad , \quad A \mapsto AM + MA$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer $\ker f$. En particulier, en trouver une base et sa dimension.
3. L'endomorphisme f est-il injectif, bijectif, un isomorphisme ?
4. Déterminer $\ker g$. En particulier, en trouver une base et sa dimension.
5. L'endomorphisme g est-il injectif, bijectif, un isomorphisme ?

Exercice 18. Soit $n \geq 1$ un entier. Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ tels que $f \circ g = 0$. Montrer que $\mathrm{Im}(g) \subseteq \ker(f)$. En déduire que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \leq n$.

Noyau et image des applications matricielles

Exercice 19. On considère les applications $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto A \cdot x$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, x \mapsto A^T \cdot x$ où
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 9 & 5 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminez le noyau de f en trouvant une base pour celui-ci.
2. Quel est le rang de f ?
3. Trouver une base pour son image, $\mathrm{Im}\, f$.
4. Trouver une base pour l'image de g en appliquant des opérations élémentaires de colonnes à la matrice A^T.
5. Trouver une base de $\mathrm{Im}\, g$ de manière plus rapide en utilisant le point 2.
6. Déterminez le noyau de g en trouvant une base pour celui-ci.
7. Est-ce que l'on a $\mathrm{Im}\, f = \ker g$ et $\ker f = \mathrm{Im}\, g$? Quelle est la relation entre les dimensions de ces quatre espaces ?

Exercice 20. On considère l'application $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto A \cdot x$ où
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de f.
2. Déterminer $\mathrm{Im}\, f$. (La décrire de la manière la plus simple possible).
3. Est-ce que f est injective, surjective, bijective ?

Exercice 21. On considère les applications $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto A \cdot x$ et $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, x \mapsto A^T \cdot x$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminez le noyau de f en trouvant une base pour celui-ci.
2. Quel est le rang de f ?
3. Est-ce que f est injective, surjective, bijective ?
4. Trouver une base pour son image, Im f.
5. Trouver une base pour l'image de g en appliquant des opérations élémentaires de colonnes à la matrice A^T.
   Indication : Comparer avec le point 1.
6. Trouver une base de Im g de manière plus rapide en utilisant le point 2 (et le fait que $\text{rg}A = \text{rg}A^T$).
7. Déterminez le noyau de g en trouvant une base pour celui-ci.
8. Est-ce que g est injective, surjective, bijective ?
9. Est-ce que l'on a Im $f = \ker g$ et $\ker f =$ Im g ? Quelle est la relation entre les dimensions de ces quatre espaces ?

Exercice 22.
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -5 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $x \mapsto Ax$.

1. Déterminer une base de $\text{im}f \equiv \text{im}A$ et sa dimension en utilisant l'algorithme de Gauss pour les colonnes de la matrice A.
2. Déterminer une base de $\ker f \equiv \ker A$ et sa dimension en utilisant l'algorithme de Gauss pour les lignes de la matrice A.
3. Supposons que l'on ait résolu 2) avant 1). Montrer qu'au moyen du théorème du rang, on peut trouver une base plus rapide pour l'image.

Exercice 23. Soit $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, x \mapsto A \cdot x$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver une base pour l'image et le noyau de f.