Université Claude Bernard Lyon 1

ALGÈBRE 2 INFO, printemps 2024

Fiche TD n°5,

Applications Linéaires — troisième partie

Exercice : Fait pendant l'ES
Exercice : Fait pendant le TD
Exercice : Partie soulignée faite pendant le TD
Exercice : A faire à la maison.
Exercice* : Des exercices plus compliqués ou abstraits (pour ceux qui sont intéressés, mais pas nécessaires pour la réussite dans cette UE).

Des projections et des rotations

Exercice 1.

On rappelle que, par définition, un projecteur est un endomorphisme p d'un espace vectoriel E qui satisfait $p^2 = p$. Un symétrique vectoriel est un endomorphisme s de E qui satisfait $s^2 = \mathrm{id}$.

1. Soient p et s deux endomorphismes et $s = 2p - \mathrm{id}$. Montrer que s est un symétrique vectoriel si et seulement si p est un projecteur.
2. Tout projecteur p est une projection sur son image $F := \mathrm{Im}(p)$ parallèlement à son noyau $G := \ker(p)$; ainsi $p = p_F$ dans cette notation. Dénotons par p_G la projection sur G parallèlement à F. Montrer que $p_F + p_G = \mathrm{id}$. Montrer également que $p_F \circ p_G = 0 = p_G \circ p_F$.
3. Exprimer une symétrie vectorielle s en fonction de p_F et p_G introduits ci-dessus (où $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{id})$). Utiliser cette expression pour montrer par un calcul direct que $s^2 = \mathrm{id}$.
4. Si $p\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est une projection orthogonale sur un plan $\pi_n := \{x \in \mathbb{R}^3 | \langle x, n\rangle = 0\}$, où $n \in \mathbb{R}^3$ désigne un vecteur normal au plan, quelle est la signification géométrique de l'endomorphisme s ?

Exercice 2.

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $F := \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}) \subseteq \mathbb{R}^2$ et $G := \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}3\\\alpha\end{pmatrix})$.

1. Pour quelles valeurs de α, G est supplémentaire à F ?
2. Soit $\alpha = 2$. Déterminer la matrice M qui entraîne la projection $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto M \cdot x$ sur F parallèlement à G.
3. Vérifier le résultat en calculant p de $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$. Vérifier aussi que $M^2 = M$.
4. Pour quelle valeur de α les droites F et G sont-elles orthogonales entre elles ? Déterminer la matrice M dans ce cas.
   Remarque : Il est un fait qu'un projecteur orthogonal a toujours une matrice symétrique dans la base canonique.
5. Vérifier que dans les deux cas, on a bien $\mathbb{R}^2 = \ker p \oplus \mathrm{Im}\, p$. Que peut-on dire sur l'application $\widetilde{p} := \mathrm{id} - p$? Déterminer en particulier $\ker \widetilde{p}$ et $\mathrm{Im}\, \widetilde{p}$.

Exercice 3.

Soient $F := \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}) \subseteq \mathbb{R}^2$ et $G := \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix})$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$.
2. Déterminer la matrice M qui entraîne la projection $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto M\cdot x$ sur F parallèlement à G.
3. Vérifier le résultat en calculant p de $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$. Vérifier aussi que $M^2 = M$.
4. Trouver la matrice M qui donne la projection sur G parallèlement à F.
5. Trouver la matrice M qui donne une projection orthogonale sur F.

Exercice 4.

1. Trouver l'application linéaire $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui correspond à la projection sur la droite d'équation $y = \frac{1}{3}x$ parallèlement à la droite $y = 2x$. Quelle est sa matrice en particulier ?
2. Déterminer la symétrie $s\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ correspondant à l'application p ci-dessus. Quelle est sa matrice en particulier ?
3. Calculer explicitement $p(v)$ et $s(v)$ pour le vecteur $v = (1, 1)$. Que font géométriquement p et s avec un tel vecteur ?
4. Trouver la projection $\widetilde{p}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sur la droite d'équation $y = 2x$ parallèlement à la droite $y = \frac{1}{3}x$.
5. Parmi les applications p, s et $\widetilde{p}$, lesquelles sont injectives, surjectives ou bijectives ?

Exercice 5.

Soit $p\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (y - 2z, x - \frac{3}{2}y, -2x + 6z)$.

1. Montrer que p est une projection orthogonale sur le plan défini par l'équation $3x+2y+z = 0$.
2. Déterminer $\ker p$ et $\operatorname{Im} p$. Quel est le rang de l'application p ? Est-ce que p est injective, surjective, bijective ? A-t-on $\mathbb{R}^3 = \ker p \oplus \operatorname{Im} p$?

Exercice* 6.

Donner un argument géométrique selon lequel les rotations dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont des applications linéaires : Dans ce but, on désigne par $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une telle rotation (où n peut être 2 ou 3, selon le contexte). Nous observons d'abord que $f(0) = 0$ afin de pouvoir nous concentrer sur les vecteurs non nuls dans la suite.

1. Soit x un vecteur non nul et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Quel est le vecteur λx dans ce cas ? Et que signifie λx pour un λ strictement négatif ?
2. Argumenter maintenant qu'en effet $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.
3. Soit x et y deux vecteurs non nuls qui ne sont pas non plus colinéaires (auquel cas l'un serait un multiple de l'autre, ce dont nous avons déjà discuté ci-dessus). On peut se convaincre qu'alors x, y, et $x + y$ forment toujours un triangle.
4. Quels sont les relations entre $f(x)$, $f(y)$ et $f(x + y)$? Est-ce qu'ils forment aussi un triangle et, si oui, lequel par rapport à celui trouvé ci-dessus ? Montrer que ce fait implique bien que $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
5. Conclure.

Exercice 7.

Soit $f_\alpha \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ une rotation dans le plan d'un angle $\alpha \in \mathbb{R} \bmod (2\pi) \equiv \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

1. Déterminer géométriquement $f_\alpha(e_1)$ et $f_\alpha(e_2)$ (pour un α pas trop grand), où $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. En déduire la matrice M_α qui engendre cette application linéaire.
3. Montrer explicitement que $M_\alpha \cdot M_\beta = M_{\alpha+\beta}$.
4. En déduire $(M_\alpha)^{-1}$. Vérifier ensuite que $(M_\alpha)^{-1} = (M_\alpha)^T$ et que $\det(M_\alpha) = 1$.
5. Est-ce que f_α est injective, surjective, bijective ?

Exercice 8.

Trouver les matrices M_i, $i = 1, \dots, 7$, des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques des espaces vectoriels correspondants.

1. $f_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotation avec centre $(0,0)$ par l'angle $\pi/4$.
2. $f_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la réflexion par rapport à la droite $x + y = 0$. (Ici une réflexion est une symétrie par rapport à un hyperplan parallèlement à sa droite orthogonale).
3. $f_3 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, la symétrie par rapport à l'origine.
4. $f_4 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la réflexion par rapport au plan $z = 0$.
5. $f_5 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la réflexion par rapport au plan $x + y = 0$.
6. $f_6 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, la réflexion par rapport à l'origine.
7. Vérifier que dans tous les cas on a bien $(M_i)^T = (M_i)^{-1}$. Calculer $\det(M_i)$ et commenter.
8. $f_7 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la symétrie par rapport à la droite $x + y = 0$ et parallèment à $y = 0$.

Exercice* 9.

On se place sur $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique.

1. Quelles sont les matrices O telle que $O^T O = I$?
2. En fonction du déterminant, décrire géométriquement O.
3. Si on se place maintenant sur $\mathbb{C}^2$, quelles sont les matrices O de déterminant 1, telles que $O^T O = I$? (On pourra montrer qu'elles sont paramétrées par $\mathbb{C}^*$).
4. Quid de $O^\dagger O = I$? Ici, par définition, $O^\dagger = \bar{O}^T$, la transposée de la matrice complex conjugée.

Exercice 10.

1. En utilisant le résultat de l'Exercice 7, trouver la matrice R^z_α d'une rotation dans $\mathbb{R}^3$ autour de l'axe z d'un angle α.
2. Trouver la matrice R^x_α d'une rotation dans $\mathbb{R}^3$ autour de l'axe x d'un angle α.
3. Trouver la matrice R^y_α d'une rotation dans $\mathbb{R}^3$ autour de l'axe y d'un angle α.
4. Vérifier explicitement pour une ou deux de ces trois matrices qu'elles satisfont la condition d'orthogonalité $R^T = R^{-1}$ et, de plus, $\det(R) = 1$.
5. Calculer $R^x_\alpha \cdot R^y_\beta$ et $R^y_\beta \cdot R^x_\alpha$. Que peut-on en conclure ?

Divers

Exercice 11.

Soit $f\colon E \to F$ une application linéaire entre les espaces vectoriels E et F, de dimensions n et m, respectivement. On note r le rang de f, $r = \mathrm{rg}(f)$.

1. f est surjective si et seulement si r a quelle valeur ? Justifier votre réponse.
2. f est injective si et seulement si r a quelle valeur ?
3. Quelles sont les conditions sur m, n et r pour que f soit bijective ? Comment appelle-t-on une application linéaire bijective ?

Exercice 12.

Soit $m \in \mathbb{N}$, E un espace vectoriel de dimension $2m$ et $f \in \mathrm{End}(E)$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes ($f^2 \equiv f \circ f$) :

(i) $\mathrm{im} f = \ker f$.

(ii) $\mathrm{rg}(f) = m$ et $f^2 = 0$.

Exercice 13.

Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(e_1) = e_2\,, \quad f(e_2) = e_3\,, \quad f(e_3) = e_1\,.$$

1. Montrer que f est un isomorphisme.
2. Montrer que $f^3 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.
3. Démontrer que $F = \{v \in \mathbb{R}^3 | f(v) = v\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa dimension.

Exercice* 14.

Soient $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère l'application $\Psi\colon E \to F$ définie par

$$[\Psi(f)]\,(x) := \int_0^x f(t)\mathrm{d}t\,,$$

pour tout $f \in E$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$. On considère egalement l'application linéaire

$$\Phi\colon F \to E,\ f \mapsto f'\,.$$

1. Montrer que Ψ est bien définie puis que c'est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau $\ker \Psi$ de Ψ.
3. Monter que pour l'image on a

$$\mathrm{im}\,\Psi = \{g \in F : g(0) = 0\}\,.$$

4. Est-ce que Ψ est injective, surjective, bijective ?
5. Déterminer $\Phi \circ \Psi$ et $\Psi \circ \Phi$.
6. Est-ce que Ψ est injective, surjective, bijective ? Même questions pour Φ.