Université Claude Bernard Lyon 1

ALGÈBRE 2 INFO, printemps 2024

Fiche TD n°2,

ESPACES VECTORIELS

$\boxed{\textbf{Exercice}}$: Les exercices le plus importants, résolus en SolEx.
Exercice : Fait pendant le TD.
Exercice : La partie soulignée faite pendant le TD.
Exercice : A faire à la maison.
Exercice* : Pour ceux qui sont intéressés, mais pas nécessaires pour la réussite dans cet UE.

Pour commencer

Exercice 1.

a) Rappeler les axiomes d'un espace vectoriel.

b) On munit $\mathbb{R}^2$ de l'addition habituelle :

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

et de la loi externe :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (\lambda, (x_1, x_2)) & \mapsto & (\lambda x_1, 0)\,. \end{array}$$

A-t-on muni ainsi $\mathbb{R}^2$ d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$? (Justifier par rapport au point **a)**).

Exercice 2.

On munit $\mathbb{R}_+^*$ de la loi de composition interne $\times$ (multiplication usuelle) et de la loi externe :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda \cdot x := x^\lambda\,. \end{array}$$

A-t-on muni ainsi $\mathbb{R}_+^*$ d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$? (Avec la multiplication usuelle comme "addition de vecteurs".)

Des sous-espaces vectoriels

Exercice 3.

Dans les cas suivants, dessiner les sous-ensembles F de $E = \mathbb{R}^2$ et indiquer si F est un sous-espace vectoriel de E :

a) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2x + 3y = 0\}$,

b) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2x + 3y = 1\}$,

c) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$,

d) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$,

e) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 \text{ et } y = -x^2\}$,

f) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$,

g) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = 3\lambda, y = 2\lambda\}$,

h) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}_+ : x = 3\lambda, y = 2\lambda\}$,

i) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$,

j) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 + 1 \text{ et } y = -x^2\}$.

Exercice 4.

Parmi les sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ suivants, lesquels forment un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$? (Ci-dessous $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})\backslash\{\mathbb{0}\}$ et $b \in \mathbb{R}^m\backslash\{0\}$).

a) $\{x \in \mathbb{R}^n | \, x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\}$,

b) $\{x \in \mathbb{R}^n | \, x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1\}$,

c) $\{x \in \mathbb{R}^n | \, \sum_{k=1}^n x_k = 0$ et $\sum_{k=1}^n k^2 x_k = 0\}$,

d) $\{x \in \mathbb{R}^n | \, A \cdot x = b\}$,

e) $\{x \in \mathbb{R}^n | \, A \cdot x = 0\}$.

Exercice 5.

Parmi les sous-ensembles des matrices suivants, lesquels forment un sous-espace vectoriel ? (Ci-dessous, $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\backslash\{\mathbb{0}\}$).

a) $\{A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) | \, A_{11} = 0\}$,

b) $\{A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) | \, A_{11} > 0\}$,

c) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | \, \sum_{i=1}^n A_{ii} = 0\}$,

d) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | \, A^T = A\}$,

e) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | \, A^2 = A\}$,

f) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | \, A$ inversible$\}$,

g) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | \, A$ pas inversible$\}$,

h) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | \, A \cdot B = B \cdot A\}$.

Exercice 6.

On admet que $E = \mathbb{R}[X]$, des polynômes à coefficients réels, est un espace vectoriel. Parmi les sous-ensembles F ci-dessous, lequels forment un sous-espace vectoriel ?

a) $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = 3\}$,

b) $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \leq 3\}$,

c) $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(3) = 0\}$,

d) $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 3\}$,

e) $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) + 3P'(0) = 0\}$,

f) $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 0$ et $P'(0) = 0\}$,

g) $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \, | \, P = \lambda X^3 + \mu^3 X - \lambda, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 7.

Soit E l'espace vectoriel des suites de nombres réels. Parmi les sous-ensembles de E ci-dessous, lesquels forment des sous-espaces vectoriels ?

a) $F = \{(u_n) \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n\}$,

b) $G = \{(u_n) \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_n - 1\}$.

Exercice 8.

On note $\mathbb{R}^{[a,b]}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^{[a,b]} = \{f : [a, b] \to \mathbb{R}\}$. Rappeler les définitions de l'addition et de la multiplication externe sur $\mathbb{R}^{[a,b]}$ et dire lesquels de ces sous-ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{[a,b]}$ (ou de $\mathbb{R}^{]a,b[}$ pour le **f)**) :

a) $\mathcal{C}^n([a, b], \mathbb{R})$ pour $n \in \mathbb{N} \cup \infty$.

b) Les applications surjectives $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

c) Les applications injectives $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

d Les applications $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $2f(a) = f(b)$,

e) Les applications $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(a) = f(b) + 1$,

f) Les applications $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables t.q., $\forall x \in]a, b[$, $f''(x) + x^2 f(x) = 0$.

$\boxed{\textbf{Exercice}}$ **9.**

On pose E l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) + 4f(x) = 0.$$

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

b) On admet que E est de dimension 2. Trouver une base de E.
Indication : Chercher parmi les fonctions de la forme $x \mapsto \sin(\alpha x)$ ou $x \mapsto \cos(\alpha x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) Montrer que pour la fonction $x \mapsto g(x) = \sin(2x + \theta)$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, est un élément dans E, $g \in E$. Exprimer g en tant que combinaison linéaire de la base construite en **b)**.

Exercice 10 (CC 2022)**.**

Les ensembles suivants sont des sous-ensembles d'espaces vectoriels, comme spécifiés par les conditions données. Lesquels d'entre eux sont des sous-espaces vectoriels ?
Répondre uniquement par **oui** ou **non**, sans preuve.

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x \text{ ou } y = -x\}$
2. $\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(A) = 1\}$
3. $\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A \text{ commute avec } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$
4. $\{\ P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) < 2\}$
5. $\{\ P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \leq 2\}$
6. $\{f \in C^2(\mathbb{R}) \mid f''(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$

Remarques sur la notation : tr représente la trace de la matrice, deux matrices A et B commutent si $A \cdot B = B \cdot A$, deg est le degré du polynôme et f'' la derivée seconde de la fonction f.

Somme directe I

Exercice 11.

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et F_1, F_2, F_3 sous-espaces vectoriels de E définis par

$$F_1 := \{(t, -t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad F_2 := \{(0, t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad F_3 := \{(t, 0, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

a) Montrer que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$, $F_2 \cap F_3 = \{0\}$ et $F_3 \cap F_1 = \{0\}$.

b) On pose $G = F_1 + F_2$. Décrire G avec des paramètres.

c) Est-ce que $F_1 + F_2$ est une somme directe, $G = F_1 \oplus F_2$?

c) La somme $G + F_3$ est-elle directe, $G = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$?

Famille libre/liée/génératrice

Exercice 12.

Étudier la dépendance linéaire des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants :

a) $u = (2, -3)$, $v = (-1, 1)$,

b) $u = (-6, 2)$, $v = (9, -3)$,

c) $u = (\mu + 1, -1)$, $v = (-3, \mu - 1)$, où $\mu \in \mathbb{R}$.

Exercice* 13.

a) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Deux vecteurs $u, v \in E$ sont dits *parallèles* s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $u = \lambda v$. Montrer que cette notion de parallélisme est une relation d'équivalence.

b) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Supposons que nous appelions deux vecteurs $u, v \in E$ parallèles s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda v$. Montrer que cette notion de parallélisme ne serait pas une relation d'équivalence.

c) Montrer que u et v sont liés si et seulement s'ils sont parallèles ou au moins un des deux vecteurs est le vecteur nul $0 \in E$.

Exercice 14.

Les familles de $\mathbb{R}^3$ suivantes sont-elles libres ou liées ?

a) $u = (2, -3, 2)$, $v = (-1, 1, -2)$;

b) $u = (-6, 2, 1)$, $v = (9, -3, 1)$;

c) $u = (-6, 2, 0)$, $v = (9, -3, 0)$;

d) $u = (10, -5, 15)$, $v = (-4, 2, -6)$;

e) $u = (1, 0, -1)$, $v = (-1, 1, 0)$, $w = (0, -1, 1)$;

f) $u = (1, 0, -1)$, $v = (-1, 1, 0)$, $w = (0, -1, 1)$, $z = (1, 1, 1)$;

g) $u = (2, -3, 2), v = (-1, 1, -2), w = (-1, 4, 4)$;

h) $u = (2, -3, 2)$, $v = (-1, 1, -2)$, $w = (0, 0, 1)$;

i) $u = (1, 3, 2)$, $v = (-2, -1, -9)$, $w = (1, 2, 3)$.

Exercice 15.

Soit $F := \mathrm{Vect}(u, v)$, le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $u = (2, -3, 2)$ et $v = (-1, 1, -2)$. Parmi les vecteurs suivants, qui appartiennent à F ?

a) $x = (-1, 4, 4)$ **b)** $y = (0, 0, 1)$ **c)** $z = (1, 2, 3)$

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses ?

d) $F = \mathrm{Vect}(u, v, x)$

e) $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}(u, v, x)$

f) $F = \mathrm{Vect}(u, x)$

g) $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}(u, x)$

h) $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}(u, v, x, y, z)$

Exercice 16 (CC 2022)**.**

1. Résoudre le système linéaire suivant d'inconnues $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$.

$$(S)\colon \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

2. Déterminer une base et la dimension du sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^5$ formé des vecteurs $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ solution de (S).

Des bases et la dimension des espaces vectoriels

Exercice 17.

a) Décomposer le vecteur $v = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$ dans la base standard de $\mathbb{R}^2$, puis dans la base $b_1 = (2, 1)$, $b_2 = (1, -3)$, c'est-à-dire déterminer les coefficients λ_k unique tel que $v = \sum_{k=1}^{2} \lambda_k b_k$.

b) Soit $(b_1, \ldots, b_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la décomposition d'un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ dans cette base aboutit à résoudre un système lineaire de la forme $Ax = b$. (En particulier, spécifier la matrice A et les vecteurs x et b).

Exercice* 18.

a) Quelle est la dimension de $\mathbb{C}^2$ vu comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$? Donner une base.

b) Montrer que les vecteurs suivants de $\mathbb{C}^3$

$$v_1 = (1+i, 1+2i, i),\ v_2 = (2, 4-i, -1),\ v_3 = (0, -1+2i, 2+i)$$

sont liés si $\mathbb{C}^3$ est consideré comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, et sont libres si $\mathbb{C}^3$ est consideré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

c) Les vecteurs (v_1, v_2, v_3), forment-ils une base de $\mathbb{C}^3$ en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$? Sur $\mathbb{R}$?

Exercice 19.

a) Montrer que la famille $((1,2,3);(4,5,6))$ est libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}^3$.
Indication : Une méthode pour répondre est d'utiliser le déterminant d'une manière appropriée ou d'utiliser la méthode de Gauss.

b) De même pour la famille suivante : $((1,2,3);(2,4,3))$.

c) Montrer que la famille $((1,1,1,1);(2,2,3,4))$ est libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 20.

a) Soit $F = \mathrm{Vect}(u,v) \subset \mathbb{R}^3$ avec $u = (1,2,3)$ et $v = (4,5,6)$. Donner l'équation cartésienne de F.
Indication : Réaliser ceci en utilisant les deux méthodes suivantes : Une fois en exigeant $\det(A) = 0$ où A est la matrice que l'on obtient en mettant les vecteurs u, v et (x,y,z) soit comme ses lignes, soit comme ses colonnes. Une deuxième fois en appliquant l'algorithme de Gauss à la matrice A et d'exiger que A soit de rang deux.

b) Soit E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$. Donner des équations cartésiennes du sous-espace F engendré par $(2,1,3,6)$ et $(-1,2,6,-3)$.

Exercice 21.

Considérer $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au maximum n.

a) Soit $k \leq n$. Montrer que chaque famille $\{P_0, P_1, ..., P_k\}$ des polynômes tel que le degré de P_m est égal a m est libre.

b) Soit $n = 2$. Donner trois polynômes de degré deux chacun qui forment une famille libre.

c) Montrer explicitement que les trois polynômes trouvés ci-dessus engendrent $\mathbb{R}_2[X]$.

d) Conclure que vos polynômes forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Quelle est la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$?

e) Montrer explicitement que la famille $\{1, X, X^2\}$ est libre dans $\mathbb{R}_n[X]$, $n \geq 2$, et génératrice dans $\mathbb{R}_2[X]$. Conclure à nouveau sur la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$.

f) *En utilisant* le fait que $R_2[X]$ est de dimension 3, existe-t-il un argument plus simple pour arriver à la conclusion **d)** ci-dessus, sans prouver séparément **b)** et **c)** ?

Exercice 22.

a) Montrer (en vérifiant explicitement les deux propriétés qui définissent une base) que les matrices suivantes,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

forment une base de $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Quelle est alors la dimension de E ?

b) Soient $F \subset E$ et $G \subset E$ les sous-espaces vectoriels formés par les matrices symétriques et anti-symétriques, respectivement. Trouver des bases pour F et pour G. Quelles sont les dimensions de F et de G ?

c) Rapeller la définition d'une somme directe et montrer, de deux façons différentes, que $E = F \oplus G$.

Exercice 23.

a) Montrer que l'ensemble $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices de trace nulle est un sous-espace vectoriel.

b) Quelle est la dimension de E ? Trouver une base de E.

c) On note $F \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices générées par $\{\mathbb{1}_2\}$. Montrer que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = E \oplus F$.

Exercice 24.

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. On désigne par $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonction paires et par $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires :

$$\mathcal{P} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)\}$$
$$\mathcal{I} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)\}$$

a) Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

b) Montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

c) Quelle est la décomposition de la fonction exponentielle ?

Exercice 25. Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n$ des matrices carrées de taille n fois n. Nous désignons par $\mathcal{S}_n$ le sous-ensemble des matrices symétriques et par $\mathcal{A}_n$ le sous-ensemble des matrices antisymétriques, définies respectivement par :

$$\mathcal{S}_n = \{S \in \mathcal{M}_n \mid S^T = S\}$$
$$\mathcal{A}_n = \{A \in \mathcal{M}_n \mid A^T = -A\}\}$$

a) Montrer que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{S}_n$.

b) Montrer que $\mathcal{M}_n = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$.

c) Décomposer la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

en tant que somme unique d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Somme directe II

Exercice 26.

Revenons à l'Exercice 11, alors soit $E = \mathbb{R}^3$ et des F_1, F_2, F_3 sous-espaces vectoriels de E définis par

$$F_1 := \{(t, -t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad F_2 := \{(0, t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad F_3 := \{(t, 0, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

a) Montrer avec un argument en utilisant des bases et des dimensions que $G = F_1 + F_2$ est une somme directe.

b) Montrer également par des arguments de dimensions et de bases que $G = F_1 + F_2 + F_3$ ne peut pas être une somme directe.

Exercice 27. On considère les sous-espaces de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x + y + z + t = 0\}$$
$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x + y = z + t\}$$
$$H = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \,:\, a = b = c = d\}\,.$$

a) Donner une base et la dimension de chacun d'eux.

b) Quelle est la dimension de $F + G$? A-t-on $\mathbb{R}^4 = F + G$? $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$?

c) Montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus H$.

Exercice 28.

On considère les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x+y=z\} \\ G &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x+z=0\} \\ H &= \{(z,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x=y=-z\}\,. \end{aligned}$$

a) Donner une base et la dimension de chacun d'eux.

b) Quelle est la dimension de $F+G$? A-t-on $\mathbb{R}^3 = F+G$? $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$?

c) Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus H$.

Exercice 29.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension 3, vérifiant $\dim F = 1$, $\dim G = 2$ et $F \not\subset G$. Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 30 (CC 2022)**.**

1. Montrer que l'ensemble $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices de trace nulle est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Trouver une base de E.
3. On note $F \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel engendré par I_2.
   Montrer que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = E \oplus F$.

Et pour terminer

Exercice 31 (CCF 2022)**.**

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$, on considère

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] | P(0) = 0 \text{ et } P'(1) = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = \mathrm{Vect}(X^3 - X - 1, X^2 + 1)$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base de F.
   Indication : Quelles sont les équations à satisfaire pour $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ telles que $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in F$?
3. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 32.

Soit E l'espace vectoriel des suites de nombres réels et $\mathcal{E} \subset E$ l'ensemble des suites vérifiant la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2\,u_n \quad (n \geq 0).$$

a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de E.

b) Montrer que les suites de terme général $a_n = (-1)^n$ et $b_n = 2^n$ forment une famille libre de $\mathcal{E}$.

c) Tenant compte du fait que les suites de $\mathcal{E}$ sont univoquement déterminées si on connaît u_0 et u_1, montrer que (a_n) et (b_n) forment une base de $\mathcal{E}$.

d) Déterminer la suite de $\mathcal{E}$ telles que $u_0 = 1$ et $u_1 = -2$.

Exercice 33. Soit E l'espace vectoriel des suites de nombres réels et $\mathcal{E} \subset E$ l'ensemble des suites vérifiant la relation de récurrence :

$$2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n \quad (n \geq 0).$$

a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de E.

b) Montrer que les suites de terme général $a_n = 1$ et $b_n = \dfrac{1}{2^n}$ forment une base de $\mathcal{E}$.

d) Déterminer l'élément $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ explicitement qui vérifie $u_0 = 1$ et $u_1 = -1$.