Université Claude-Bernard Lyon 1

ALGÈBRE 2 INFO, printemps 2024

Fiche TD n°1,

SYSTEMES LINEAIRES ET CALCUL MATRICIEL

Préambule

Il existe plusieurs types d'exercices : tout d'abord, les plus importants sont encadrés. Ils seront corrigés dans les sessions SolEx. Deuxièmement, les exercices soulignés (ou des parties d'exercices soulignés) seront corrigés par vous lors des travaux dirigés (TD), sous la supervision de l'enseignant— dans ce contexte, des points pour la participation seront attribués pour chaque session. Enfin, les exercices (ou parties d'exercices) restants, qui ne sont pas soulignés, sont plus ou moins du même type que les précédents et sont destinés à vous aider à vous entraîner. Les exercices marqués d'un astérisque sont plus difficiles et supposés s'adresser aux étudiants particulièrement intéressés. Les examens sont principalement basés sur les exercices encadrés et soulignés, mais les exercices non soulignés, qui ne sont pas étoilés, peuvent également être utilisés.

$\boxed{\textbf{Exercice}}$: Les exercices le plus importants
<u>**Exercice**</u> : Fait pendant le TD
Exercice : La partie soulignée faite pendant le TD
Exercice : A faire à la maison pour s'entraîner
Exercice* : Pour ceux qui sont intéressés, mais les examens ne seront pas basés sur ces exercices

Systèmes linéaires

Exercice 1. Résoudre les systèmes suivants.

$$\underline{a)}\begin{cases} -3x - 2y + 2z = 0 \\ -2x - y + z = 2 \\ 7x + 5y - 4z = -3 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} y + z = 5 \\ x + z = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Exercice 2. Résoudre les systèmes suivants.

$$a)\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -x + z = -1 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 2x + y = 2 \\ -x + z = -1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Indication: On remarque la similarité entre les deux systèmes, les résoudre simultanément.

<u>**Exercice**</u> **3.** Résoudre suivant les valeurs du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ x - 2y + 2z = \alpha \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

Exercice 4 (CC 2011)**.** Résoudre les systèmes suivants.

$$\underline{a)}\begin{cases} 2x + 3y + z = 3 \\ x + 4y + 3z = -1 \\ -3x - 2y + z = -7 \\ x - 4y - 5z = 7 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 2x + 2y - 4z = 2 \\ -2x + 3y + 4z = 3 \\ -3x - 3y + 6z = -3 \\ x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$$

Exercice 5. Résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 3 \\ 9x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & 5x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 5 \\ 7x_1 & + & x_2 & + & 6x_3 & - & x_4 & = & 7 \end{cases}$$

Exercice 6. Résoudre les systèmes suivants.

$$a) \begin{cases} -x_2 + 2x_4 + 3x_5 & = & 2 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 & = & 3 \\ -x_1 + 3x_2 - x_5 & = & 1 \\ 3x_1 - 2x_3 - 7x_4 - 2x_5 & = & -1 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & = & 3 \\ 3x_1 - 4x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 & = & 1 \end{cases}$$

Exercice 7. Résoudre les deux systèmes suivants. Le a) selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$a) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 & = & -1 \\ 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 6x_4 & = & 4 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & -5 \\ 6x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 & = & -1 + 2\alpha \end{cases} \qquad b) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 & = & 1 \\ 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 6x_4 & = & 2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 3 \\ 6x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 & = & 4 \end{cases}$$

Exercice 8.
Déterminer un polynôme à coefficients réels P de degré 2 tel que $P(-1) = 0$, $P(1) = 1$ et $P(2) = 2$.

Calcul matriciel I : Multiplication et autres opérations sur les matrices

Exercice 9. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $AB \equiv A \cdot B$, le produit de la matrice A et B. Calculer également BA. Comparer les résultats.
2. Calculer $\mathrm{tr}(A)$, $\mathrm{tr}(B)$, les traces des matrices A et B. Calculer également $\mathrm{tr}(AB)$ et $\mathrm{tr}(BA)$ et comparer. (Cf. aussi Exercice 14 ci-dessous).
3. Calculer $\det(A)$ et $\det(B)$, les déterminants de ces matrices.
4. Vérifier par le calcul explicite que $\det(AB) = \det(BA)$. Comparer avec $\det(A) \cdot \det(B)$.
5. Calculer les matrices transposées des matrices A et B, puis $A^T \cdot B^T$ et $\det(A^T)$. Que peut-on remarquer en comparant avec les résultats de 1. et 3. ci-dessus ?

Exercice 10. Soient A, B, C et D les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Décider lesquelles des sommes $A + B$, $A + C$, $A + D$, $B + C$, $B + D$ et $C + D$ sont bien définies et les calculer dans ce cas.
2. Décider lesquels des produits AB, BA, AC, CA, AD, DA, BC, CB, BD, DB, CD et DC sont bien définies et calculer certains d'entre eux dans ce cas.

Exercice 11. On définit les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} ; \; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -6 \end{pmatrix} ; \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} ; \; D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} ; \; E = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} ; \; F = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Parmi les quantités suivantes, dire lesquelles sont bien définies et les calculer :

$$A + B \; ; \; A + F \; ; \; A + 2F \; ; \; F - I_2 \; ; \; AB \; ; \; BA \; ; \; BC \; ; \; CB \; ; \; DE \; ; \; AE \; ; \; EA \; ; \; AF$$

Exercice* 12. Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A \cdot B$ et $B \cdot A$.
2. Calculer $(A+B)^2$.
3. Calculer $A^2 + 2AB + B^2$. Que peut-on remarquer ?
4. Quelle est la formule générale de $(A+B)^2$ pour A et B deux matrices carrées quelconques ?
5. Soient $A, B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ deux matrices telles que $AB = BA$. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:
$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$
On rappelle que pour $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq k \leq n$, on a : $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ et que $0! := 1$.

Exercice 13. Trouver A et B des matrices telles que $A \neq \mathbb{0}$, $B \neq \mathbb{0}$ et $A \cdot B = \mathbb{0}$.

Exercice 14. Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Donner $(AB)_{i,i}$ le coefficient à la ligne i, colonne i de la matrice AB.
2. En déduire la formule de $\mathrm{tr}(AB)$.
3. Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
4. En déduire que $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(CAB)$.
5. Soit A est inversible. Montrer que $\mathrm{tr}(ABA^{-1}) = tr(B)$.
6. Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
Calculer $\mathrm{tr}(ABC)$ et $\mathrm{tr}(BAC)$. Que peut-on remarquer ?

Calcul matriciel II : Inverses de matrices

Exercice 15. En utilisant des opérations élémentaires, calculer les inverses des matrices suivantes ou conclure qu'elles ne sont pas inversibles.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 14 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16.

Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Calculer le déterminant des matrices A, B et C et ensuite leur inverses lorsque c'est possible.
Indication: Comparer la matrice C avec la matrice A.

Exercice 17. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer l'inverse de A.
2. Réécrire le système suivant (cf. aussi l'exercice 1) sous forme matricielle et le résoudre en utilisant A^{-1}.
$$\begin{cases} -3x - 2y + 2z = 0 \\ -2x - y + z = 2 \\ 7x + 5y - 4z = -3 \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{Exercice}}$ **18.** Déterminer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

Exercice 19 (CC 2022)**.** Déterminer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 20.

1. Soient A et B de matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que AB est inversible et que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2. Soient A, B et C trois matrices inversibles. Donner la matrice réciproque de ABC ?
3. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $AB = \mathbb{1}_n$. Montrer que $B = A^{-1}$.
4. Trouver A et B deux matrices telles que $A \cdot B = \mathbb{1}$ et $B \cdot A \neq \mathbb{1}$.
   Indication: Si A et B sont des matrices carrées alors : $A \cdot B = \mathbb{1} \iff B \cdot A = \mathbb{1}$. (Cf. 3.).

Exercice* **21.** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Executer l'algorithm de Gauss-Jordan et déterminer l'inverse de A.
2. On note $P_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer $A_2 = P_{1,2} \cdot A$. Que remarque-t-on ?
3. On note $D_1(1/2) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer $A_3 = D_1(1/2) \cdot A_2$. Que remarque-t-on ?
4. Continuer le raisonnement avec les matrices :
$$T_{3,1}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ T_{3,2}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D_3(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
5. Puis avec les matrices : $T_{1,3}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T_{1,2}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
6. En utilisant la question 3 de l'exercice 20 montrer que :
$$T_{1,2}(-1) \cdot T_{1,3}(1) \cdot D_3(-1) \cdot T_{3,2}(-1) \cdot T_{3,1}(3) \cdot D_1(1/2) \cdot P_{1,2}$$
   est l'inverse de A.

Remarque : Ce produit revient à faire les opérations élémentaires faites sur A, sur la matrice identité, ce qui montre bien que l'algorithme de Gauss Jordan fonctionne et donne bien l'inverse de A.

Calcul matriciel III : Puissances de matrices et applications

Exercice 22. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

1. Calculer A^n pour $n = 1, 2, 3, 4$
2. Déviner une formule pour A^n, $n \geq 1$ et la montrer par récurrence.

3. On considère $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de vecteurs de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer U_n en fonction de n.
4. La formule trouvée pour A^n, $n \in \mathbb{N}^*$, est-elle également correcte pour $n \in \mathbb{Z}$? Justifier.

Exercice 23. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que A est inversible et calculer A^{-1}.
2. (a) Déterminer une matrice J telle que $A = \mathbb{1}_2 + J$.
   (b) Calculer J^2.
   (c) A l'aide de la question 5 de l'exercice 12, en déduire A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$. (Comparer le résultat avec l'Exercice 22).

Exercice* 24. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Déterminer une matrice $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = 2\mathbb{1}_3 + J$.
2. Calculer J^2, J^3 puis, pour tout $n \geq 4$, J^n.
3. En utilisant la question 5 de l'exercice 12, calculer A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

<u>Exercice</u> 25. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 et $A^3 - A^2 + A - \mathbb{1}_3$.
2. Justifier que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A^2, A et $\mathbb{1}_3$.

Exercice 26 (CC1 2021)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^n pour $n = 1, 2, 3, 4$.
2. Montrer par récurrence sur n : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.
3. Vérifier que $A^2 - 3A + 2\mathbb{1}_2 = 0$.
4. Utiliser cette formule pour montrer que A et inversible. Puis en déduire une formule pour A^{-1} en fonction de A et $\mathbb{1}_2$.

Exercice 27. On pose $A = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2.
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.
3. S'il existe, déterminer l'inverse de A.

Exercice 28.

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de P, en déduire que P est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer $D = P^{-1}AP$.
3. Calculer D^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

5. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = b_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\begin{cases} a_{n+1} &= -a_n - 2b_n \\ b_{n+1} &= 3a_n + 4b_n \end{cases}, \quad \text{pour tout entier } n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (b) Calculer a_n et b_n explicitement en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 29.
Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de P, en déduire que P est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer $D = P^{-1}AP$.
3. Calculer D^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = b_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\begin{cases} a_{n+1} &= a_n + 2b_n \\ b_{n+1} &= 4a_n + 3b_n \end{cases}, \quad \text{pour tout entier } n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (b) Calculer a_n et b_n explicitement en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 30 (CC 2022, sauf 4.)**.**
Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Trouver l'inverse de la matrice P.
2. Calculer $D = P^{-1}AP$ et ensuite D^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire A^n.
4. On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$, $a_1 = 4$ et la relation de récurrence : $a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer a_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

   Indication: Considérer la récursion $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

Mélangés

Exercice 31. (CC 2023)
Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

et $\vec{b} = (1, 1, 3)$.

1. Déterminer le déterminant de A.
2. Déterminer l'inverse de la matrice A.
3. Trouver la solution unique de $A\vec{x} = \vec{b}$.

Exercice 32. (CC 2023)
Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

et $\vec{b} = (1, 1, 3)$.

1. Déterminer le déterminant de A.
2. Déterminer l'inverse de la matrice A.
3. Trouver la solution unique de $A\vec{x} = \vec{b}$.

Indication: : Il y a plusieurs façons de répondre à ces questions et cela peut aussi influencer l'ordre dans lequel vous y répondez. Vous êtes libre de choisir, tant que vous répondez aux trois questions ci-dessus à la fin.

Applications géométriques

Exercice 33. On considère les quatre plans p_1, p_2, p_3 et p_4 dans l'espace $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$\begin{aligned} p_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x + y - 3z = 4\}, \\ p_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x + 3y - z = -2\}, \\ p_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 4x - 3y - 2z = 5\}, \\ p_4 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x + 2y - 2z = 1\}. \end{aligned} \tag{1}$$

1. (CC 2023) Trouver la forme paramétrique du plan p_1. Pareil pour p_2.
2. Trouver la forme paramétrique des plans p_3 et p_4.
3. Trouver la forme paramétrique de la droite $d_{12} := p_1 \cap p_2$.
   Indication: Utiliser l'algorithme de Gauss. (Reproduire, si on le souhaite, le même résultat en utilisant 1.).
4. Trouver la forme paramétrique de la droite $d_{ij} := p_i \cap p_j$ pour d'autres choix de $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$.
5. En utilisant l'algorithme de Gauss, déterminer l'ensemble $E_1 := p_1 \cap p_2 \cap p_3$ et interpréter le résultat géométriquement.
   Reproduire ceci en utilisant le résultat du point 3. ci-dessus (on observe que $E_1 = d_{12} \cap p_3$).
6. En utilisant l'algorithme de Gauss, déterminer l'ensemble $E_2 := p_1 \cap p_2 \cap p_4$ et interpréter le résultat géométriquement.
7. Déterminer $E_3 := p_1 \cap p_3 \cap p_4$. Que peut-on observer ? Interpréter le résultat géométriquement.

Exercice 34 (Alignement et déterminant)**.** On se place sur $\mathbb{R}^2$.

1. Notons O: $(0, 0)$, l'origine. Soit A: (x_0, y_0) et B: (x_1, y_1) deux points différents de O.
   Montrer que $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires si et seulement si :

$$\det(\begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{pmatrix}) = 0$$

2. Soient A: (x_0, y_0), B: (x_1, y_1) et C: (x_2, y_2) trois points distincts. Ils sont dit alignés si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
   Montrer que A, B et C sont alignés si et seulement si :

$$\det(\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}) = 0$$

   Indication: Appliquer les opérations de colonne sur le déterminant ci-dessus pour réduire le problème à celui résolu au point précédent.

3. Déduire la forme générale de l'équation d'une droite passant par l'origine, puis d'une droite quelconque dans $\mathbb{R}^2$.
4. Trouver une équation de la droite passant par les points $A\colon (1,1)$ et $B\colon (5,-2)$.

Exercice* 35 (Ménélaüs)**.** On considère un triangle non plat ABC. Soient $I \in (BC)$, $J \in (CA)$ et $K \in (AB)$. Montrer que $\frac{\overline{IC}}{\overline{IB}}\frac{\overline{KB}}{\overline{KA}}\frac{\overline{JA}}{\overline{JC}} = 1$ si et seulement si I, J, K sont alignés.

Exercice 36 (Interpolation et cercle sphère)**.** On se place sur $\mathbb{R}^2$. On rappelle que l'équation d'un cercle de centre $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $R > 0$ est donnée par :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \ .$$

1. Montrer que pour tout cercle, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que, le cercle soit d'équation :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \ .$$

2. Réciproquement, quelles sont les conditions sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour que $x^2+y^2+ax+by+c = 0$ soit l'équation d'un cercle ?
3. Montrer que par trois points non-alignés passe un unique cercle.
   Indication: Réduire le problème à un système linéaire et utiliser le résultat de l'exercice 34.2. (Comment construire le cercle à la règle et au compas ?)
4. Trouvez le cercle qui passe par les trois points suivants : $(-1, 2)$, $(1, 4)$ et $(3, 2)$.

Exercice* 37. Comment le résultat de l'exercice 36 se généralise-t-il en dimension 3 et plus ?

Exercice* 38 (Varignon)**.** On se place sur $\mathbb{C}$ que l'on identifie au plan affine sur $\mathbb{R}$.

1. Soit P_0, P_1 et P_2 trois points. Montrer qu'il existe un triangle $P_0'P_1'P_2'$ tel que P_0, P_1 et P_2 soient les milieux des cotés de ce triangle.
2. Montrer que cela est faux lorsque l'on remplace les triangles par des quadrilatères. C'est à dire si on considère P_0, P_1, P_2, P_3. Montrer qu'il n'existe pas en général de quadrilatère $P_0'P_1'P_2'P_3'$ tel que P_0, P_1, P_2 et P_3 soient les milieux des cotés de ce quadrilatère.
3. Donner une conditions sur le quadrilatère de départ pour que cela soit vrai.
4. Montrer que pour tout polygone $P_0P_1..P_n$ avec n pair, il existe un polygone $P_0'P_1'..P_n'$ dont les milieux des cotés sont $P_0P_1..P_n$.

Exercice 39 (Intersection de droites et concours)**.** On se place sur $\mathbb{R}^2$. Soient D et D' deux droites du plan d'équation respective

$$ax + by + c = 0$$
$$a'x + b'y + c' = 0$$

avec $(a, b, c, a', b', c') \in \mathbb{R}^6$, $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a', b') \neq (0, 0)$.

1. Quelles sont les conditions pour que D et D' s'intersectent en un point ?
2. Dans ce cas, quelles sont les coordonnées de $D \cap D'$?
3. On considère une troisième droite D'' d'équation $a''x + b''y + c'' = 0$. Montrer que les droites sont concourantes ou parallèles si et seulement si :

$$\det(\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}) = 0$$