Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre de printemps 2023-2024**

L1 Math-Info — UE : Algèbre 2

Contrôle terminal - Session 1 - Correction

LUNDI 6 MAI 2024 - DURÉE : 2H

Exercice 1.

1. (a) • On a : $0 - 2 \times 0 + 0 + 0 = 0$, ainsi $(0,0,0,0) \in F$.

• Soit $v_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1) \in F$, $v_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in F$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors :

$$\lambda v_1 + v_2 = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2, \lambda t_1 + t_2).$$

De plus, $x_1 - 2y_1 + z_1 + t_1 = 0$ et $x_2 - 2y_2 + z_2 + t_2 = 0$ car $(v_1, v_2) \in F^2$. On en déduit :

$$\begin{aligned}\lambda x_1 + x_2 - 2(\lambda y_1 + y_2) + \lambda z_1 + z_2 + \lambda t_1 + t_2 &= \lambda(x_1 - 2y_1 + z_1 + t_1) + x_2 - 2y_2 + z_2 + t_2 \\ &= \lambda \times 0 + 0 = 0,\end{aligned}$$

d'où $\lambda v_1 + v_2 \in F$. Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.

(b) Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$,

$$u \in F \iff x - 2y + z + t = 0 \iff t = -x + 2y - z \iff u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -x + 2y - z \end{pmatrix}$$

$$\iff u = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \iff u \in \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$$

où on a noté $f_1 = (1, 0, 0, -1)$, $f_2 = (0, 1, 0, 2)$ et $f_3 = (0, 0, 1, -1)$.

On a donc montré que $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$.

Montrons maintenant que (f_1, f_2, f_3) est une famille libre.

Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ tel que $af_1 + bf_2 + cf_3 = (0, 0, 0, 0)$, alors :

$$\left\{\begin{array}{rl} a & = 0 \\ b & = 0 \\ c & = 0 \\ -a + 2b - c & = 0 \end{array}\right. \iff a = b = c = 0.$$

Ainsi (f_1, f_2, f_3) est libre, comme c'est aussi une famille génératrice de F, on en déduit que (f_1, f_2, f_3) est une base de F.

Par conséquent, la dimension de F est 3.

2. (a) Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$,

$$u \in F \cap G \iff u \in F \text{ et } u \in G \iff x - 2y + z + t = 0 \text{ et } \exists (a, b) \in \mathbf{R}^2,\ u = au_1 + bu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \\ -b \end{pmatrix}$$

$$\iff -2a + b - b = 0 \text{ et } \exists (a, b) \in \mathbf{R}^2,\ u = au_1 + bu_2$$

$$\iff a = 0 \text{ et } \exists (a, b) \in \mathbf{R}^2,\ u = au_1 + bu_2$$

$$\iff \exists b \in \mathbf{R},\ u = bu_2 \iff u \in \mathrm{Vect}(u_2)$$

Ainsi $F \cap G = \mathrm{Vect}(u_2)$, comme $u_2 \neq (0, 0, 0, 0)$, (u_2) est une base de $F \cap G$.

(b) D'après l'énoncé, $\dim G = 2$, de plus, d'après les questions précédentes, $\dim F = 3$ et $\dim(F \cap G) = 1$, on applique la formule de Grassmann :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 3 + 2 - 1 = 4.$$

(c) D'après la question 2.(a), $F \cap G \neq \{(0,0,0,0)\}$, donc la somme de F et de G n'est pas directe.

(d) $F + G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ et on a vu que $\dim(F + G) = 4 = \dim \mathbf{R}^4$, donc $F + G = \mathbf{R}^4$.

3. Posons $e_1 = (1,0,0,0) \neq (0,0,0,0)$ et $H = \mathrm{Vect}(e_1)$, on remarque que $e_1 \notin F$, ainsi comme F est un hyperplan de $\mathbf{R}^4$ on a bien $F \oplus H = \mathbf{R}^4$.
Remarque : on peut aussi montrer que $F \cap H = \{(0,0,0,0)\}$ et remarquer que $\dim F + \dim H = \dim \mathbf{R}^4$.

Exercice 2.

1. (a) Soit $P = a + bX + cX^2 \in \mathbf{R}_2[X]$, alors $P' = b + 2cX$, ainsi :

$$u(P) = 2Xa + 2bX^2 + 2cX^3 - bX^2 - 2cX^3 = 2aX + bX^2.$$

Donc $u(P) \in \mathbf{R}_2[X]$.

(b) Soit $(P,Q) \in \mathbf{R}_2[X]^2$ et soit $\alpha \in \mathbf{R}$, on a :

$$\begin{aligned} u(\alpha P + Q) &= 2X(\alpha P + Q)(X) - X^2(\alpha P + Q)'(X) \\ &= \alpha[2XP(X) - X^2P'(X)] + 2XQ(X) - X^2Q'(X) \\ &= \alpha u(P) + u(Q) \end{aligned}$$

Donc u est une application linéaire.

2. Soit $P = a + bX + cX^2 \in \mathbf{R}_2[X]$,

$$\begin{aligned} P \in \ker u &\iff u(P) = 0_{\mathbf{R}_2[X]} \iff 2aX + bX^2 = 0_{\mathbf{R}_2[X]} \\ &\iff a = b = 0 \quad \text{car } (X, X^2) \text{ est libre} \\ &\iff P = cX^2 \iff P \in \mathrm{Vect}(X^2) \end{aligned}$$

Ainsi $\ker u = \mathrm{Vect}(X^2)$ et comme X^2 est non nul, (X^2) est une base de $\ker u$.

3. (a) $\mathbf{R}_2[X]$ est de dimension finie et u est une application linéaire, d'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(u) + \dim(\ker u) = \dim \mathbf{R}_2[X]$ et d'après la question précédente $\dim(\ker u) = 1$, donc :

$$\mathrm{rg}(u) = 3 - 1 = 2.$$

(b) $(1, X, X^2)$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$, de plus :

$$u(1) = 2X, \qquad u(X) = 2X^2 - X^2 = X^2, \qquad u(X^2) = 0.$$

Donc $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}(u(1), u(X), u(X^2)) = \mathrm{Vect}(2X, X^2) = \mathrm{Vect}(X, X^2)$. Ainsi (X, X^2) est une famille génératrice de cardinal 2 et $\mathrm{rg}(u) = 2$, par conséquent, (X, X^2) est une base de $\mathrm{Im}\, u$.

4. D'après les questions 2 et 3.(b), $X^2 \in \ker u \cap \mathrm{Im}\, u$ et X^2 est non nul, donc la somme de $\ker u$ et $\mathrm{Im}\, u$ n'est pas directe.

Exercice 3.

1. On a :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$,

$$u \in \ker f \iff f(x,y,z) = (0,0,0) \iff \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ -x + 3y + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 3y - z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 3y - z = 0 \\ \phantom{x - {}} 8y + 4z = 0 \\ \phantom{x - {}} 8y + 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 3y - z = 0 \\ \phantom{x - {}} 2y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ z = -2y \end{cases}$$

$$\iff u = \begin{pmatrix} y \\ y \\ -2y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\iff u \in \mathrm{Vect}((1,1,-2)).$$

Ainsi $\ker f = \mathrm{Vect}((1,1,-2))$, comme $(1,1,-2) \neq (0,0,0)$, la famille $((1,1,-2))$ est une base de $\ker f$.

3. (a) $\mathbf{R}^3$ est de dimension finie et f est une application linéaire, d'après le théorème du rang, $\dim(\ker f) + \mathrm{rg}(f) = \dim \mathbf{R}^3$, donc $\mathrm{rg}(f) = 3 - 1 = 2$.

   (b) $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbf{R}^3$, donc $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$.
   Mais $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est liée puisque $\mathrm{rg}(f) = 2$, étudions si $(f(e_2), f(e_3))$ est libre.
   Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $af(e_2) + bf(e_3) = (0,0,0)$, alors :

$$\begin{cases} -a + b = 0 \\ 3a + b = 0 \\ 2a + 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -a + b = 0 \\ \phantom{-a + {}} 4b = 0 \\ \phantom{-a + {}} 4b = 0 \end{cases} \iff a = b = 0.$$

   Donc $(f(e_2), f(e_3)) = ((-1,3,2),(1,1,2))$ est libre, comme c'est une famille de cardinal 2 dans $\mathrm{Im}\, f$ qui est de dimension 2, c'est donc une base de $\mathrm{Im}\, f$.

4. (a) Montrons que la famille est libre. Soit $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$ tel que $av_1 + bv_2 + cv_3 = (0,0,0)$, alors :

$$\begin{cases} -a - b + c = 0 \\ -a + b \phantom{{}+c} = 0 \\ 2a \phantom{{}-b} + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -a - b + c = 0 \\ \phantom{-a -{}} 2b - c = 0 \\ - 2b + 3c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -a - b + c = 0 \\ \phantom{-a -{}} 2b - c = 0 \\ \phantom{-a - 2b - {}} 2c = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0.$$

   Donc (v_1, v_2, v_3) est une famille libre de 3 vecteurs dans $\mathbf{R}^3$ qui est de dimension 3, par conséquent, $\mathscr{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

   (b) On a :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) P est une matrice de passage, elle est donc inversible.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow -L_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_3}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 & -1/2 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

On retrouve que P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

(d) On a :

$$\begin{aligned} f(v_1) &= -f(e_1) - f(e_2) + 2f(e_3) = -3e_1 + e_2 - 2e_3 + e_1 - 3e_2 - 2e_3 + 2e_1 + 2e_2 + 4e_3 \\ &= 0 \\ f(v_2) &= -f(e_1) + f(e_2) = -3e_1 + e_2 - 2e_3 - e_1 + 3e_2 + 2e_3 = -4e_1 + 4e_2 \\ &= 4(-e_1 + e_2) = 4v_2 \\ f(v_3) &= f(e_1) + f(e_3) = 4e_1 + 4e_3 = 4(e_1 + e_3) \\ &= 4v_3 \end{aligned}$$

Donc $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $a = 2$.

Remarque : on peut aussi utiliser la formule de changement de base et calculer $P^{-1}AP = B$.

5. (a) On a :

$$\begin{aligned} Y^2 &= (P^{-1}XP)(P^{-1}XP) = P^{-1}X(PP^{-1})XP = P^{-1}XI_3XP = P^{-1}X^2P \\ &= P^{-1}AP = B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On peut choisir $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, alors $Y^2 = B$.

(b) Posons $X = PYP^{-1}$, alors X convient. En effet, d'après les calculs de la question précédente, on a :

$$X^2 = PY^2P^{-1} = PBP^{-1} = A.$$

6. On considère $g \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ est X. D'après la question 5.(b), $X^2 = A$ et A est la matrice de f dans la base canonique, d'où $g^2 = f$.

Calculons les coefficients de X :

$$PY = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = PYP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme X est la matrice de g dans $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$, on en déduit :

$$g(e_1) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right),$$
$$g(e_2) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right),$$
$$g(e_3) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right).$$