Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre de printemps 2023-2024**

L1 Math-Info UE : Algèbre 2

Contrôle terminal - Session 1

Lundi 6 mai 2024 - Durée : 2h

Avertissement : Sauf mention contraire, toute réponse doit être justifiée. Tout appareil électronique et toute communication pendant l'examen sont interdits. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (6 pts)

1. On considère F le sous-ensemble de $\mathbf{R}^4$ suivant :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x - 2y + z + t = 0\}.$$

   (a) (1 pt) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.

   (b) (1,5 pt) Déterminer une base de F et préciser sa dimension.

On considère les deux vecteurs de $\mathbf{R}^4$ suivants :

$$u_1 = (0, 1, 0, 0) \quad \text{et} \quad u_2 = (0, 0, 1, -1).$$

On note G le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ engendré par (u_1, u_2), c'est-à-dire $G = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.
On admet que (u_1, u_2) est une base de G.

2. (a) (1 pt) Déterminer une base de $F \cap G$.

   (b) (0,5 pt) Calculer la dimension de $F + G$.

   (c) (0,5 pt) A-t-on $F \oplus G = \mathbf{R}^4$? Justifier.

   (d) (0,5 pt) A-t-on $F + G = \mathbf{R}^4$? Justifier.

3. (1 pt) Déterminer un sous-espace vectoriel H de $\mathbf{R}^4$ tel que $F \oplus H = \mathbf{R}^4$.

Exercice 2. (4,5 pts) On considère l'application $u \colon \mathbf{R}_2[X] \to \mathbf{R}[X]$ définie par, pour tout $P \in \mathbf{R}_2[X]$,

$$u(P) = 2XP(X) - X^2P'(X).$$

1. (a) (0,5 pt) Montrer que, pour tout $P \in \mathbf{R}_2[X]$, on a : $u(P) \in \mathbf{R}_2[X]$.

   (b) (1 pt) Montrer que u est une application linéaire.

2. (1 pt) Déterminer une base de $\ker u$.
   Indication : trouver des conditions sur $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ pour que $a + bX + cX^2 \in \ker u$.

3. (a) (0,5 pt) Calculer le rang de u.

   (b) (1 pt) Déterminer une base de l'image de u.

4. (0,5 pt) A-t-on $\ker u \oplus \mathrm{Im}\, u = \mathbf{R}_2[X]$?

Exercice 3. (9,5 pts) On définit une application linéaire $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ en posant :

$$f(e_1) = 3e_1 - e_2 + 2e_3, \quad f(e_2) = -e_1 + 3e_2 + 2e_3, \quad f(e_3) = e_1 + e_2 + 2e_3,$$

où $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

1. (0,5 pt) Écrire la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$.
2. (1 pt) Déterminer une base du noyau de f.
3. (a) (0,5 pt) Calculer le rang de f.
   (b) (1 pt) Déterminer une base de l'image de f
4. On considère les vecteurs de $\mathbf{R}^3$:

$$v_1 = (-1, -1, 2), \qquad v_2 = (-1, 1, 0), \qquad v_3 = (1, 0, 1).$$

   On note $\mathscr{B}' = (v_1, v_2, v_3)$.

   (a) (1 pt) Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
   (b) (0,5 pt) Écrire la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.
   Remarque : avec les notations de l'amphi d'INFO, $P = [\mathrm{Id}]_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}$.
   (c) (1,5 pt) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (d) (1 pt) Montrer que la matrice B de f dans la base $\mathscr{B}'$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$ où a est un réel positif à déterminer.
   Remarque : avec les notations de l'amphi d'INFO, $A = [f]_{\mathscr{B}} \equiv [f]_{\mathscr{B}\mathscr{B}}$ *et* $B = [f]_{\mathscr{B}'} \equiv [f]_{\mathscr{B}'\mathscr{B}'}$.
5. Dans cette question, on cherche une matrice $X \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ qui est solution de l'équation $X^2 = A$. Supposons que $X \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ soit telle que $X^2 = A$. On pose $Y = P^{-1}XP$.

   (a) (0,5 pt) Calculer la matrice Y^2 et donner une matrice Y telle que $Y^2 = B$.
   (b) (1 pt) En déduire une matrice X qui vérifie l'équation $X^2 = A$.
6. (1 pt) Montrer qu'il existe une application linéaire $g\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ telle que $g^2 = f$ et donner $g(e_1)$, $g(e_2)$, $g(e_3)$.