

---

**Contrôle continu du 29 mars 2024**

Durée : 45 minutes

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Toutes les réponses doivent être justifiées.

---

**Exercice 1 (7 points)**

Dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_3[X]$ , on considère

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = 0 \text{ et } P'(1) = 0\}$$

- a. (3 pts) Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_3[X]$ .
- b. (4 pts) Déterminer une base de  $F$ .

*Indication : Quelles sont les équations à satisfaire pour  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  telles que  $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in F$  ?*

**Solution 1** Vect  $(X^3 - 3X, X^2 - 2X)$

**Exercice 2 (13 points)**

Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Considérons l'application

$$f: \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{M}_2, \quad A \mapsto MA,$$

où  $\mathcal{M}_2$  denote l'ensemble des matrices deux fois deux à valeurs réelles.

- a. (3 pts) Montrer que  $f$  est une application linéaire.
- b. (4 pts) Déterminer son noyau  $\ker f$ .  
En particulier, trouver une base et la dimension de  $\ker f$ .

*Indication : Calculer  $f(A)$  pour  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .*

- c. (4 pts) Déterminer l'image  $\operatorname{im} f$ .  
En particulier, trouver une base et la dimension de  $\operatorname{im} f$ .
- d. (2 pts) Montrer que

$$\mathcal{M}_2 = \ker f \oplus \operatorname{im} f.$$

**Solution 2**

$$\ker f = \operatorname{Vect} \left( \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\operatorname{im} f = \operatorname{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$