**Université Claude Bernard Lyon 1** — **Semestre printemps 2024**

L1 — UE : Algèbre 2 (INFO)

---

**Contrôle Continu du 7 mars 2024**

Durée : 60 minutes

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Toutes les réponses doivent être justifiées.

---

**<u>Exercice 1</u> (7 pts)**

**a.** (5 pts) Résoudre le système linéaire suivant d'inconnues $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{R}^6$.

$$(S)\colon \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 4x_5 + x_6 = 0 \end{cases}$$

**b.** (2 pts) Déterminer une base et la dimension du sous-espace vectoriel $F$ de $\mathbb{R}^6$ formé des vecteurs $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ solution de $(S)$.

*Indication : Algorithme de Gauss.*

**<u>Exercice 2</u> (4 pts)**

Les ensembles suivants sont des sous-ensembles d'espaces vectoriels, comme spécifiés par les conditions données. Lesquels d'entre eux sont des sous-espaces vectoriels ? Justifier votre réponse dans chaque cas.

**a.** $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 2z = 0 \text{ et } x - y - 3 = 0\}$.

**b.** Soit $E$ l'espace vectoriel des suites de nombres réels.
$F = \{(u_n) \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\}$.

**c.** $F = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A_{11} + A_{12} \leqslant A_{21} + A_{22}\}$

**<u>Exercice 3</u> (3 pts)** Soient

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

**a.** Est-ce que $(u, v, w)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$ ?

**b.** Est-ce que $(u, v, w)$ forme une base de $\mathrm{Vect}(u, v, w)$ ?

**<u>Exercice 4</u> (6 pts)** Considérons l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à valeurs réelles de degré au plus trois. Soient

$$\begin{aligned} P(X) &= X^3 + X^2 + X + 1\,, \\ Q(X) &= X^3 + X + 1\,, \\ R(X) &= X^3 + X^2 + 1\,. \end{aligned}$$

**a.** (2.5 pts) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (P, Q, R)$ est libre.

**b.** (2.5 pts) Soit $S(X) = X^2 + X$. Écrire $S$ sous forme d'une combinaison linéaire de $P$, $Q$ et $R$.

**c.** (1 pt) $\mathcal{F} = (P, Q, R)$ est-il une base de $E$ ?