Université Claude-Bernard Lyon 1

ALGÈBRE 2 INFO, printemps 2024

Fiche TD n°4,

Applications Linéaires — deuxième partie

Exercice : Fait pendant l'ES
Exercice : Fait pendant le TD
Exercice : Partie soulignée faite pendant le TD
Exercice : A faire à la maison.
Exercice* : Des exercices plus compliqués ou abstraits (pour ceux qui sont intéressés, mais pas nécessaires pour la réussite dans cette UE).

Représentations matricielles des applications linéaires

Exercice 1. Trouver les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques des espaces vectoriels correspondants.

1. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (2x+3y, -x+y)$.
2. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (y, -x+y, 2x-y)$.
3. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (x+4y+z, -x+y+z)$.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $f_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto A \cdot x$.
Donner une expression explicite de $f_A(x,y)$, $f_A(f_A(x,y))$ et $f_{A^2}(x,y)$ où $f_{A^2}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto A^2 \cdot x$. Que remarque-t-on ?

Exercice 3. Soit $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit f l'application linéaire $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(e_1) = 2e_1 + e_2 + 3e_3$, $f(e_2) = e_1 + e_3$ et $f(e_3) = e_2 + e_3$.

1. Écrire la matrice associée à l'application f.
2. Déterminer $\ker(f)$ et commenter le résultat de façon géométrique (c'est un plan, une droite, ...).
3. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et commenter le résultat de façon géométrique.
4. Calculer l'image de $x = (-3, 6, 3)$ par f et commenter.
5. Calculer l'image de $y = (1, 1, 1)$ par f et commenter.
6. Est-ce que f est injectif, surjectif, bijectif ? S'agit-il d'un endomorphisme, d'un isomorphisme, d'un automorphisme (rappelons la définition de ces notions en tout cas) ?

Exercice 4. Soit $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit f l'application linéaire $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(e_1) = 3e_1 + e_2 + 2e_3$, $f(e_2) = 6e_1 + 2e_2 + 4e_3$ et $f(e_3) = -9e_1 - 3e_2 - 6e_3$.

1. Écrire la matrice associée à l'application f.
2. Déterminer $\ker(f)$ et commenter le résultat de façon géométrique.
3. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et commenter le résultat de façon géométrique.
4. Calculer l'image de $x = (0, 3, 2)$ par f et commenter.
5. Calculer l'image de $y = (3, 1, 2)$ par f et commenter.

<u>Exercice</u> 5. Trouver les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques des espaces vectoriels correspondants. On note $\mathcal{E} = \{1, X, X^2, ..., X^n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. $f_1 \colon \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f_1(P) = P'$.
2. $f_2 \colon \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $f_2(P)(X) = XP'(X)$.
3. $f_3 \colon \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $f_3(P)(X) = P(X+1)$.
4. $f_4 \colon \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^2$ définie par $f_4(P) = (P(-1), P(1))$

<u>Exercice</u> 6. Soit $f \colon \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ une application linéaire définie par $f(P) = 2P' + P$.

1. Trouver la matrice de h dans la base canonique.
2. Quel est le rang de f ?
3. Montrer que $\mathcal{B} = (1, 2+X, 4X+X^2)$ est une base pour $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Trouver la matrice $A = [f]_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ de f dans la base canonique $\mathcal{E} = (1, X, X^2)$ pour l'espace de départ et la base $\mathcal{B}$ pour l'espace d'arrivée.

Exercice* 7. Soit $\mathbb{K}$ un corps. On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ le dual du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Montrer que E^* est un espace vectoriel.
2. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de E. Justifier qu'il existe une unique famille de vecteurs, $e_i^* \in E^*$ telle que $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}, \forall (i,j) \in I^2$. On appellera cette ensemble de formes linéaires <u>famille duale</u>.
3. Montrez que la famille duale d'une base est toujours libre.
4. En déduire qu'en dimension finie, la famille duale est une base et que $\dim(E) = \dim(E^*)$.
5. Exemples :
   (a) Quelle est la base duale de $\{(1,1), (1,0)\}$ dans $\mathbb{R}^2$?
   (b) Quelle est la famille duale de $\{X^k\}_{k\in[0,n]}$ dans $\mathbb{R}_n[X]$? (Remarque : le dual de $\mathbb{R}[X]$ n'est pas du tout isomorphe à $\mathbb{R}[X]$.)
6. On note $E^{**} = (E^*)^*$ le bidual de E. Soit E de dimension finie. Montrez que : $\begin{array}{ccc} E & \to & E^{**} \\ x & \mapsto & ev_x \end{array}$ est un isomorphisme.
7. Montrer qu'en dimension finie toute base du dual admet une base dont c'est le dual.

Exercice* 8. Soient E, F deux espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On note $u^T \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ tel que $u^T(\lambda)(x) := \lambda(u(x)), \forall (\lambda, x) \in F^* \times E$.

1. Montrez que :
   (a) $\{\xi \in E^* | \xi(x) = 0, \forall x \in \ker(u)\} = \mathrm{Im}(u^T)$,
   (b) si E est de dimension finie, $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u^T)$.
2. En déduire que u est injective si et seulement si u^T est surjective.
3. Quelle est la relation entre la transposée de la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{E}$ et la matrice de u^T dans $\mathcal{E}^*$, $\mathcal{B}^*$?.

Isomorphismes et changements de bases

Exercice 9. Soit $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}$ la base $((1,2),(3,-1))$.

1. Trouver la matrice $P \equiv P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$ qui transforme un vecteur de $\mathcal{B}$ en un vecteur de $\mathcal{E}$ telle que $[x]_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} \cdot [x]_{\mathcal{B}}$ pour tous les vecteurs $x \in \mathbb{R}^2$.
2. Déterminer P^{-1}.
3. Déterminer $[x]_{\mathcal{B}}$ pour $x = (4,1)$, $x = (-2,3)$ et $x = (-3,8)$.
4. Soit $f(x,y) = (-4x+3y, 2x+y)$, donc $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$. Trouver $M := [f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} \equiv [f]_{\mathcal{B}}$, la matrice qui correspond à f dans la base $\mathcal{B}$, une fois par un calcul direct pour la fonction f et une autre fois en utilisant les matrices de passage trouvées dans les questions précédentes.

Exercice 10. Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'application linéaire associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Soient $u = e_1 - e_2 + e_3$, $v = 2e_1 - e_2 + e_3$, $w = 2e_1 - 2e_2 + e_3$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de passage $P := P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \mathrm{id}_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$, c.-à-d. la matrice P telle que $[x]_{\mathcal{E}} = P[x]_{\mathcal{B}}$.
3. Calculer P^{-1}.
4. Déterminer la matrice $R = [f]_{\mathcal{B}}$.
5. Calculer $P^{-1}AP$ en fonction de R.
6. Calculer R^4 et en déduire les valeurs de A^{4n} pour tous les $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 11. Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x,y,z) = (2x - y + z, -x - y, 5x - y).$$

1. Trouver la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{E}$.
2. Montrer que $\mathcal{B} = ((1,2,0),(0,1,-1),(0,1,1))$ est une base pour $\mathbb{R}^3$ et trouver la matrice de passage P telle que $P[x]_{\mathcal{B}} = [x]_{\mathcal{E}}$.

Exercice 12. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et f l'application linéaire définie par la matrice A donnée dans la base canonique de E : $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 4 & -3 & -4 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les matrices des applications g et h suivantes : $g = f - \mathrm{id}$ et $h = f + 3\,\mathrm{id}$, où id désigne l'application identité dans E.
2. Déterminer $\ker(g)$ et en donner une base $\mathcal{B}_1$.
3. Déterminer $\ker(h)$ et en donner une base $\mathcal{B}_2$.
4. Montrer que $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 13. On considère l'application $f\colon \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $P \mapsto P - (X-2)P'$. On note $\mathcal{E} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer le noyau de f.
3. Déterminer l'image de f.
4. Déterminer la matrice $A \equiv [f]_{\mathcal{E}}$ de f dans la base $\mathcal{E}$.
5. Montrer que $\mathcal{B} = (1, X-2, (X-2)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
6. Déterminer la matrice de passage $P \equiv P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$. Calculer P^{-1}.
7. Quelle est la matrice $B \equiv [f]_{\mathcal{B}}$ de f dans la base $\mathcal{B}$?

Exercice 14. Dans cet exercice, on va déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire (où P' et P'' désignent la dérivée première et seconde du polynôme, respectivement)

$$\Psi\colon \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_3[X], P \mapsto P + (X + X^2)P' + (-2 + 3X - X^3)P''$$

en utilisant les isomorphismes canoniques entre $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$. Cela donnera un exemple de leur utilité, puisque la solution d'un problème d'équations différentielles est transposée de cette manière à un problème de matrices.

1. On désigne par $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique dans $\mathbb{R}_n[X]$ et par $\mathcal{C} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Définir une application linéaire $\varphi_{n+1}\colon \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ par la formule $\varphi_{n+1}(X^i) := e_{i+1}$ pour tout $i \in \{0, 1, \ldots n\}$. Montrer que c'est bien un isomorphisme pour chaque n. (Autrement dit, montrer que l'application est bien définie comme une application linéaire et que c'est une bijection).
2. Trouver la matrice $M \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$ qui correspond à cette application. Se convaincre (par exemple à l'aide d'un ou deux exemples) que si l'on met $\psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, x \mapsto M \cdot x$, alors en effet $\psi = \varphi_4 \circ \Psi \circ (\varphi_3)^{-1}$.
3. Déterminer $\ker M$ et $\mathrm{Im}\ M$ par des méthodes habituelles. En particulier, construire des bases pour ces deux espaces.
4. Utiliser les isomorphismes pour déterminer $\ker \Psi$ et $\mathrm{Im}\ \Psi$ ainsi que leur base. (En particulier, par exemple, $\ker \Psi = (\varphi_3)^{-1} (\ker \psi) \equiv (\varphi_3)^{-1} (\ker M)$.
5. Vérifier explicitement que les vecteurs de base du noyau de Ψ satisfont bien l'équation différentielle
$$P + (X + X^2)P' + (-2 + 3X - X^3)P'' = 0.$$

Exercice 15. Soit

$$\Psi\colon \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_4[X], P \mapsto (1-2X+3X^2)P+(-2+3X-4X^2-2X^3)P'+(1+2X-3X^2+2X^3+3X^4)P''$$

Déterminer $\ker \Psi$ et $\mathrm{Im}\ \Psi$ ainsi que leur bases.
Indication : Utiliser les bases canoniques de $R_n[X]$ pour transformer ce problème en un problème matriciel dans une étape intermédiaire.