Université Claude Bernard Lyon 1 — UE Algèbre 1-B
Semestre de printemps 2023-2024

Feuille 2 : Polynômes

Premiers calculs

Exercice 1. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ satisfaisant à l'une des relations suivantes :

a) $P(X^2+1) = P(X)$; b) $P(2X+1) = P(X)$.

Exercice 2. Soit n entier naturel non nul, on note $P_n(X) = (1+X)(1+X^2)(1+X^4)\cdots(1+X^{2^n})$. Calculer les coefficients de P_n. (*Commencer par $n \in \{1,2,3\}$ puis faire une récurrence.*)

Racines d'un polynôme (sans dérivation, sans arithmétique)

Exercice 3. Soient a, b, c des complexes, avec a non nul, et soit $P(X) = aX^2 + bX + c$.

1. Montrer que si z_1 est une racine de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, alors il existe w complexe tel que $P(X) = a(X - z_1)(X - w)$. *On pourra remarquer que $P(X) = P(X) - P(z_1)$.*
2. Soient z_1 et z_2 les solutions de l'équation $P(z) = 0$. Démontrer que $P(X) = a(X - z_1)(X - z_2)$.
3. En déduire les relations suivantes : $\begin{cases} z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a} \ ; \\ z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$
4. Redémontrer ces relations en utilisant les formules connues pour les solutions d'une équation de degré deux.

Exercice 4. Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients complexes, disons

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

Soit z un complexe tel que $P(z) = 0$, c'est-à-dire $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0$. Exhiber un polynôme $Q(X)$ tel que

$$P(X) = (X - z)Q(X).$$

Définition. Dans la situation de l'exercice 4, on dit que z est *racine double* de P si $Q(z) = 0$.

Exercice 5. Soit P le polynôme réel défini par $P(X) = X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + \alpha X^2 + 4X + 1$. On suppose que -1 est une racine de P.

1. Calculer α.
2. Montrer que -1 est racine double de P (cf. exercice 4).
3. Exhiber un polynôme R tel que $P(X) = (X+1)^2 R(X)$.
4. Montrer que j est une racine de R. (On rappelle que $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}$.)
5. Montrer de deux façons différentes que j^2 est racine de R : d'une part en calculant $R(\mathrm{j}^2)$, d'autre part en utilisant seulement les relations $R(\mathrm{j}) = 0$ et $\mathrm{j}^2 = \bar{\mathrm{j}}$.
6. Déterminer les six racines de P.

Remarque. Il y aura très vraisemblablement un exercice de ce style dans l'un des contrôles qui restent.

Solution. 1. On calcule $P(-1) = 1 - 4 + 8 - 10 + \alpha - 4 + 1 = \alpha - 8$ donc, comme -1 est une racine, on a $\alpha = 8$.

2. *Première solution.* On trouve $Q(X)$ tel que $P(X) = (X+1)Q(X)$ (cf. exercice 4).

$$\begin{aligned}
P(X) &= P(X) - P(-1)\\
&= X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + 8X^2 + 4X + 1\\
&\qquad - \big((-1)^6 + 4\cdot(-1)^5 + 8\cdot(-1)^4 + 10\cdot(-1)^3 + 8\cdot(-1)^2 + 4\cdot(-1) + 1\big)\\
&= X^6 - (-1)^6 + 4\big(X^5 - (-1)^5\big) + 8\big(X^4 - (-1)^4\big) + 10\big(X^3 - (-1)^3\big)\\
&\qquad + 8\big(X^2 - (-1)^2\big) + 4\big(X - (-1)\big)\\
&= \quad (X+1)(X^5 - X^4 + X^3 - X^2 + X - 1)\\
&\quad + 4(X+1)(X^4 - X^3 + X^2 - X + 1)\\
&\quad + 8(X+1)(X^3 - X^2 + X - 1)\\
&\quad + 10(X+1)(X^2 - X + 1)\\
&\quad + 8(X+1)(X - 1)\\
&\quad + 4(X+1)\\
&= (X+1)(X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 5X^2 + 3X + 1)
\end{aligned}$$

On vérifie que -1 est racine du polynôme qui apparaît en facteur et on recommence...
Deuxième solution[1]. On sait que -1 est racine double de P si et seulement si $P(-1) = P'(-1) = 0$. On commence par calculer

$$P'(X) = 6X^5 + 20X^4 + 32X^3 + 30X^2 + 16X + 4,$$

puis

$$P'(-1) = -6 + 20 - 32 + 30 - 16 + 4 = 0.$$

On peut donc affirmer qu'il existe $R(X)$ tel que $P(X) = (X+1)^2R(X)$.

3. Avec la première solution, on a été amené à calculer $R(X)$. Avec la deuxième solution, le plus commode[2] est de poser la division euclidienne de $P(X)$ par $(X+1)^2 = X^2 + 2X + 1$.

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & X^6 & +4X^5 & +8X^4 & +10X^3 & +8X^2 & +4X & +1 & X^2+2X+1\\ \cline{9-9}
\ominus & X^6 & +2X^5 & +X^4 & & & & & X^4+2X^3+3X^2+2X+1\\ \cline{1-4}
 & & 2X^5 & +7X^4 & +10X^3 & & & & \\
 & \ominus & 2X^5 & +4X^4 & +2X^3 & & & & \\ \cline{2-5}
 & & & 3X^4 & +8X^3 & +8X^2 & & & \\
 & & \ominus & 3X^4 & +6X^3 & +3X^2 & & & \\ \cline{3-6}
 & & & & 2X^3 & +5X^2 & +4X & & \\
 & & & \ominus & 2X^3 & +4X^2 & +2X & & \\ \cline{4-7}
 & & & & & X^2 & +2X & +1 & \\
 & & & & \ominus & X^2 & +2X & +1 & \\ \cline{5-8}
 & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Cela signifie que $P(X) = (X+1)^2R(X)$ où $R(X) = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$.

4. On peut mener les calculs en utilisant la valeur de R calculée à l'instant ou pas.

Rappel. On sait que $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}$ est une racine cubique de l'unité – si on ne le sait pas, on le constate immédiatement puisque $\mathrm{j}^3 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}\cdot 3} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi} = 1$. De $\mathrm{j}^3 - 1 = 0$ on tire aussi la relation $(\mathrm{j}-1)(\mathrm{j}^2+\mathrm{j}+1) = 0$, d'où, puisque $\mathrm{j} \neq 1$,

$$\mathrm{j}^2 + \mathrm{j} + 1 = 0.$$

1. On utilise le critère avec la dérivée. Maintenant qu'on a vu ce critère, c'est évidemment cette solution qui est attendue dans un contrôle.
2. Maintenant qu'on l'a vu en cours...

On peut voir cette relation comme une équation pour calculer le cosinus et le sinus de $2\pi/3$: le discriminant est $1^2-4=-3$, dont une racine est $\mathrm{i}\sqrt{3}$, d'où $\mathrm{j}=\frac{-1\pm\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et le signe $+$ s'impose puisque $\sin\frac{2\pi}{3}>0$ puisque $\frac{2\pi}{3}\in\,]0,\pi[$.
Les puissances de j se calculent très facilement – en fait, vu que $\mathrm{j}^3=1$, la suite $(\mathrm{j}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est périodique de période 3.

k	0	1	2	3	4	5	6
j^k	1	j	j^2	1	j	j^2	1

Première solution. On calcule benoîtement :

$$\begin{aligned}P(\mathrm{j})&=\mathrm{j}^6+4\mathrm{j}^5+8\mathrm{j}^4+10\mathrm{j}^3+8\mathrm{j}^2+4\mathrm{j}+1\\&=1+4\mathrm{j}^2+8\mathrm{j}+10+8\mathrm{j}^2+4\mathrm{j}+1\\&=12(\mathrm{j}^2+\mathrm{j}+1)\\&=0\,;\\P'(\mathrm{j})&=6\mathrm{j}^5+20\mathrm{j}^4+32\mathrm{j}^3+30\mathrm{j}^2+16\mathrm{j}+4\\&=6\mathrm{j}^2+20\mathrm{j}+32+30\mathrm{j}^2+16\mathrm{j}+4\\&=36(\mathrm{j}^2+\mathrm{j}+1)\\&=0.\end{aligned}$$

Deuxième solution. Si on a confiance dans les calculs, on utilise R à la place de P, ce qui est plus commode :

$$\begin{aligned}R(\mathrm{j})&=\mathrm{j}^4+2\mathrm{j}^3+3\mathrm{j}^2+2\mathrm{j}+1=\mathrm{j}+2+3\mathrm{j}^2+2\mathrm{j}+1=3(\mathrm{j}^2+\mathrm{j}+1)=0\,;\\R'(\mathrm{j})&=4\mathrm{j}^3+6\mathrm{j}^2+6\mathrm{j}+2=4+6\mathrm{j}^2+6\mathrm{j}+2=6(\mathrm{j}^2+\mathrm{j}+1)=0.\end{aligned}$$

Cela permet de conclure : vu que j est racine double de R, il existe S tel que $R(X)=(X-\mathrm{j})^2S(X)$ et a fortiori j est racine double de P puisque $P(X)=(X-\mathrm{j})^2(X+1)^2S(X)$.

5. *Première solution.* On calcule comme dans la deuxième solution de la question précédente (on pourrait le faire avec P mais c'est moins agréable) :

$$\begin{aligned}R(\mathrm{j}^2)&=\mathrm{j}^8+2\mathrm{j}^6+3\mathrm{j}^4+2\mathrm{j}^2+1=\mathrm{j}^2+2+3\mathrm{j}+2\mathrm{j}^2+1=3(\mathrm{j}^2+\mathrm{j}+1)=0\,;\\R'(\mathrm{j}^2)&=4\mathrm{j}^6+6\mathrm{j}^4+6\mathrm{j}^2+2=4+6\mathrm{j}+6\mathrm{j}^2+2=6(\mathrm{j}^2+\mathrm{j}+1)=0.\end{aligned}$$

Deuxième solution[3]. On sait que $\mathrm{j}^2=\bar{\mathrm{j}}$.Or P est, de même que P', un polynôme réel donc ses coefficients sont leurs propres conjugués. On sait que la conjugaison préserve sommes et produits :

$$P(\mathrm{j}^2)=P(\bar{\mathrm{j}})=\bar{\mathrm{j}}^6+4\bar{\mathrm{j}}^5+8\bar{\mathrm{j}}^4+10\bar{\mathrm{j}}^3+8\bar{\mathrm{j}}^2+4\bar{\mathrm{j}}+1=\overline{\mathrm{j}^6+4\mathrm{j}^5+8\mathrm{j}^4+10\mathrm{j}^3+8\mathrm{j}^2+4\mathrm{j}+1}=\bar{0}=0.$$

Idem avec P'.

6. On a vu que $P(X)=(X+1)^2(X-\mathrm{j})^2S(X)$ et que j^2 est une racine double de P donc de S (car $P(\mathrm{j}^2)=P'(\mathrm{j}^2)=0$ et que $\mathrm{j}^2+1\neq 0$ et $\mathrm{j}^2-\mathrm{j}\neq 0$). Ainsi on peut trouver T tel que $S(X)=(X-\mathrm{j}^2)T(X)$. Comme T est de degré $\deg(S)-2=0$ et que $S(X)$ comme $(X-\mathrm{j}^2)^2$ sont unitaires, on a $T=1$. Autrement dit :

$$P(X)=(X+1)^2(X-\mathrm{j})^2(X-\mathrm{j}^2)^2.$$

Les six racines de P sont en fait trois racines doubles : -1, j et j^2. □

Exercice 6. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, soient $a,b,c\in\mathbb{R}$ et soit P le polynôme $P(X)=aX^{n+1}+bX^n+c$. Peut-on choisir a, b, c pour que P admette 1 comme racine double ? Quel est alors l'ordre de cette racine ?

3. Ceci est une principe général qu'il est bon de connaître : si z est une racine d'un polynôme réel P, alors $\overline{z}$ aussi.

Exercice 7. Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ un polynôme réel ou complexe, avec $a \neq 0$. On suppose qu'il admet trois racines *distinctes* α, β et γ.

1. À l'aide de l'exercice 4, justifier qu'il existe des polynômes Q et R tels que

$$\begin{aligned} P(X) &= (X-\alpha)Q(X)\ ; \\ Q(X) &= (X-\alpha)(X-\beta)R(X). \end{aligned}$$

2. Montrer que $R(X) = a(X-\gamma)$.
3. Montrer enfin que $\alpha + \beta + \gamma = -b/a$ (cf. 3).

Exercice 8. Soit $P = X^3 - 5X^2 + 6X - 1$.

1. Montrer que P a au moins une racine réelle.
2. À l'aide de l'exercice 4, en déduire que P admet trois racines réelles ou complexes. On les note α, β et γ.
3. Exhiber un polynôme dont les racines sont $1-\alpha$, $1-\beta$ et $1-\gamma$. Justifier qu'aucun de ces trois nombres n'est nul.
4. Exhiber un polynôme dont les racines sont $\dfrac{1}{1-\alpha}$, $\dfrac{1}{1-\beta}$ et $\dfrac{1}{1-\gamma}$.
5. Calculer enfin $\dfrac{1}{1-\alpha} + \dfrac{1}{1-\beta} + \dfrac{1}{1-\gamma}$.

Exercice 9. On définit une suite de polynômes par $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$ pour tout $n \geq 0$.

1. Calculer P_2, P_3, P_4.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a $P_n(z + \frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n}$.
4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $P_n(2\cos(\theta))$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, donner les racines de P_n.

Exercice 10. Déterminer toutes les racines complexes des polynômes suivants :

a) $X^n + X^{n-1} + \cdots + X + 1 \quad (n \in \mathbb{N}$ donné$)$;
b) $X^{11} + 2^{11} \quad \big(\text{NB} : 2^{11} = -(-2)^{11}\big)$;
c) $X^4 + 4$;
d) $X^4 - \mathrm{j}$ où $\mathrm{j} = \exp(2\mathrm{i}\pi/3)$;
e) $X^8 + X^4 + 1$;
f) $X^5 - 1$.

Solution. Cet exercice est une sorte de révision sur les racines de l'unité et les racines n-ièmes de nombres complexes.

a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 1$, $z^n + \cdots + z + 1 \neq 0$. Sinon, on a

$$z^n + z^{n-1} + \cdots + z + 1 = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$$

donc z est une racine du polynôme $X^n + \cdots + 1$ si et seulement si $z \neq 1$ et $z^{n+1} = 1$. Autrement dit, z est une racine $(n+1)$-ième de l'unité autre que 1 : il existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n+1}}$.

b) Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors

$$\begin{aligned} z \text{ est une racine de } X^{11} + 2^{11} &\iff z^{11} = -2^{11} = (-2)^{11} \\ &\iff \left(\frac{z}{-2}\right)^{11} = 1 \\ &\iff \exists k \in \{0, \ldots, 10\},\ \frac{z}{-2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{11}}. \end{aligned}$$

Ainsi, les racines de $X^{11} + 2^{11}$ sont les $-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{11}}$.

c) Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors

$$\begin{aligned} z \text{ est une racine de } X^4+4 &\iff z^4 = -4 \\ &\iff z^4 = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \\ &\iff \exists k \in \{0,\dots,3\},\ z = \sqrt[4]{4}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{4}} \end{aligned}$$

Or $\sqrt[4]{4} = \sqrt{\sqrt{4}} = \sqrt{2}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i})$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i}$ donc les racines de X^4+4 sont les $(1+\mathrm{i})\mathrm{i}^k$ $(0 \le k \le 3)$, c'est-à-dire $1+\mathrm{i}$, $(1+\mathrm{i})\mathrm{i} = -1+\mathrm{i}$, $(1+\mathrm{i})\mathrm{i}^2 = -(1+\mathrm{i}) = -1-\mathrm{i}$, $(1+\mathrm{i})\mathrm{i}^2 = -(1+\mathrm{i})\mathrm{i} = 1-\mathrm{i}$, ou encore $\pm 1 \pm \mathrm{i}$.

d) Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors

$$\begin{aligned} z \text{ est une racine de } X^4-\mathrm{j} &\iff z^4 = \mathrm{j} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^4 \\ &\iff \left(\frac{z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}\right)^4 = 1 \\ &\iff \exists k \in \{0,\dots,3\},\ \frac{z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{2}} \\ &\iff \exists k \in \{0,\dots,3\},\ z = \mathrm{i}^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}. \end{aligned}$$

Ainsi, les racines de $X^4-\mathrm{j}$ sont $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{\pi}2\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}$.
NB : On peut aussi être plus futé et remarquer que $\mathrm{j} = \mathrm{j}^4$, de sorte que $z^4 = \mathrm{j}$ équivaut à $z^4 = \mathrm{j}^4$, i.e. à $z/\mathrm{j} = \mathrm{i}^k$ pour $0 \le k \le 3$.

e) On a $X^8+X^4+1 = (X^4)^2+X^4+1$. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors z est racine de X^8+X^4+1 si et seulement si $w = z^4$ est racine de X^2+X+1. Or les racines de X^2+X+1 sont j et j^2 (vu un million de fois environ). Donc z est racine de X^8+X^4+1 si et seulement si $z^4 = \mathrm{j}$ ou $z^4 = \mathrm{j}^2$. Autrement dit, $X^2+X+1 = (X-\mathrm{j})(X-\mathrm{j}^2)$ donc $X^8+X^4+1 = (X^4-\mathrm{j})(X^4-\mathrm{j}^2)$.

On a déterminé les racines quatrièmes de j au point précédent. Pour j^2 il suffit de remplacer $2\pi/3$ par $4\pi/3$, ce qui donne $\mathrm{i}^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. Noter que ce sont les conjugués des solutions de la question d, ce qui est normal puisque X^8+X^4+1 est un polynôme réel, donc ses racines sont deux à deux conjuguées.

Bref, les racines de X^8+X^4+1 sont $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2}{\pi}2\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{6}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

f) Les racines de X^5-1 sont les racines cinquièmes de l'unité : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}}$ pour $0 \le k \le 4$. □

Exercice 11. 1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On écrit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_i X^i$ et on suppose que $a_k = a_{n-k}$ pour $k \in \{0,\dots,n\}$. Montrer que si un complexe z non nul est racine de P, alors $1/z$ est aussi racine.

2. Trouver les racines de $6X^4-35X^3+62X^2-35X+6$.

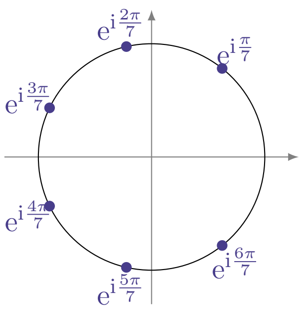
Exercice 12. Montrer que le polynôme $X^{163}+24X^{57}-6$ admet au moins une racine réelle. Même question pour X^7+3X^2+2.

Dérivation

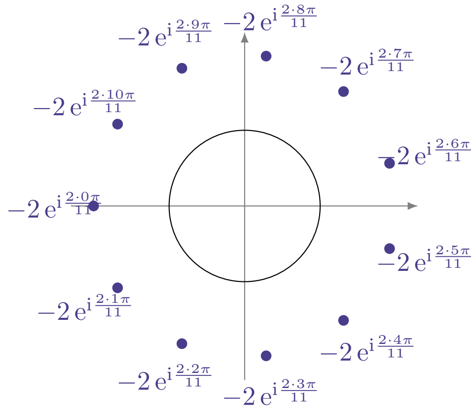
Exercice 13. Soient P, Q et R trois polynômes. On suppose que $P = QR$. Calculer $P'Q-PQ'$. En déduire qu'il existe un polynôme S tel que $P'Q-PQ' = Q^2S$.

Exercice 14. Reprendre les exercices 5 et 6 en utilisant la dérivation pour caractériser les racines multiples.

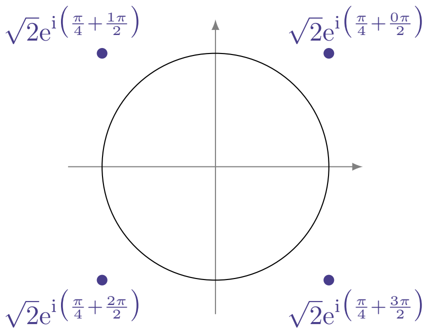
Exercice 15 (variante de la formule de Taylor)**.** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $P(X+1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(n)}(X)}{n!}$.



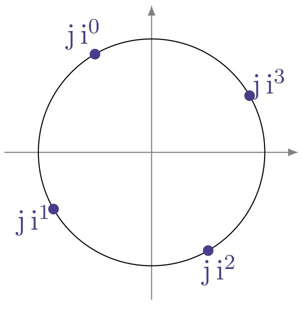
a) $n = 6$



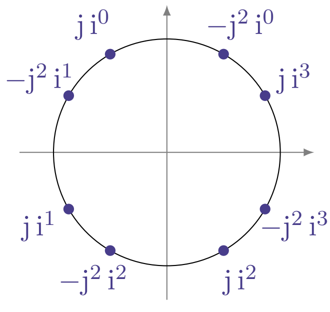
b)



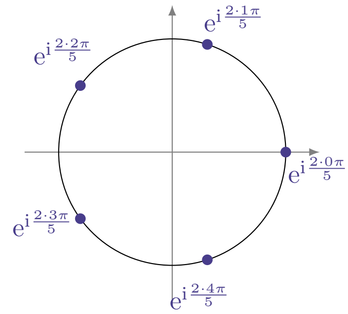
c)



d)



e)



f)

Artithmétique

Exercice 16. Factoriser chacun des polynômes de l'exercice 10 dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 17. Soit P un polynôme et soit x_0 un scalaire. Montrer que le reste de la division de P par $X - x_0$ est $P(x_0)$. (Comparer avec l'exercice 4.)

Exercice 18. Calculer le pgcd des couples de polynômes (P, Q) suivants :

1. $P(X) = 6(X-1)^2(X+2)^3(X^2+1)^4$ et $Q(X) = 15(X-1)(X+7)^3(X^2+1)$;
2. $P(X) = X^7 + 2X^6 - X - 2$ et $Q(X) = X^3 + X^2 - 2X$;
3. $P(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et $Q(X) = X(X-1)^2(X-2)$;
4. $P(X) = X^5 - X^4 + X^3 - X^2 + X - 1$ et $Q(X) = X^7 + X^5 + 8X^4 + X^3 + 8X^2 + 8$.

Exercice 19. Soit a un nombre complexe et soit $P_a(X) = 2X^3 - 10X^2 + 16X + a$ dans $\mathbb{C}[X]$.

1. Calculer le pgcd de P_a et P_a'.
2. Pour quelles valeurs de a le polynôme P_a admet-il une racine double ? Pour chacune de ces valeurs, trouver toutes les racines de P_a.

Exercice 20. Soient $P(X) = X^4 - 5X^3 + 8X^2 - 10X + 12$ et $Q(X) = X^4 + X^2 - 2$. Déterminer le pgcd de P et Q puis deux polynômes U et V tels que $UP + VQ = \mathrm{pgcd}(P, Q)$.

Exercice 21. Soient a et b deux réels distincts et P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note λ et μ les restes respectifs de la division euclidienne de P par $X - a$ et par $X - b$.

1. Exprimer à l'aide de λ et μ le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.
2. Qu'a-t-on montré dans le cas particulier où $\lambda = \mu = 0$?

Exercice 22. Soient a et b deux entiers naturels avec b non nul.

1. On forme la division euclidienne de a par b : $a = bq + r$ avec q et r entiers et $0 \leq r < b$. Calculer le reste de la division euclidienne de $X^a - 1$ par $X^b - 1$.
2. Calculer le pgcd de $X^a - 1$ et $X^b - 1$.