Feuille 1 : Nombres complexes

Premiers calculs

Exercice 1. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

a) $z = 4 + 5i$, b) $z = (-2 + 2i) + (5 + 3i)$, c) $z = (-3 - 7i)(1 - 2i)$,

d) $z = (4 + 5i)(5 + 3i)(1 - 2i)$, e) $z = \dfrac{4 - 3i}{5 + 2i}$, f) $z = \dfrac{(4 - 3i)(1 - 2i)}{7 - 3i}$,

g) $z = \dfrac{(7 + 6i)(-3 - 2i)}{2 + i} + 4 + i$.

Réponses.

a) $\mathrm{Re}(z) = 4,\ \mathrm{Im}(z) = 5$; b) $\mathrm{Re}(z) = 3,\ \mathrm{Im}(z) = 5$; c) $\mathrm{Re}(z) = -17,\ \mathrm{Im}(z) = -1$;

d) $\mathrm{Re}(z) = 79,\ \mathrm{Im}(z) = 27$; e) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{14}{29},\ \mathrm{Im}(z) = -\dfrac{23}{29}$; f) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{19}{58},\ \mathrm{Im}(z) = -\dfrac{83}{58}$;

g) $\mathrm{Re}(z) = -6,\ \mathrm{Im}(z) = -10$.

Exercice 2. Pour $m \in \mathbb{R}$, calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $z = \dfrac{1 + im}{2m + i(m^2 - 1)}$.

Réponses. $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{m}{m^2 + 1}$, $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{1}{m^2 + 1}$.

Exercice 3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Exprimer le conjugué des nombres complexes suivants en fonction de $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$:

a) $z + 1$, b) $z^2 + 3i$, c) $\bar{z} + 2z$, d) $\bar{z} + z - i$,

e) $z^3 + 1$, f) $iz^2 - 3\bar{z}$, g) $z - \bar{z} + iz$, h) $z^2 - i\bar{z} + 4$.

Réponses. On note $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$. Alors :

a) $z + 1 = a + 1 - bi$; b) $z^2 + 3i = a^2 - b^2 - (2ab + 3)i$; c) $3a - bi$;

d) $2a + i$; e) $a^3 - 3ab^2 + 1 + (-3a^2b + b^3)i$; f) $-2ab - 3a + (-a^2 + b^2 - 3b)i$;

g) $-b - (a + 2b)i$; h) $a^2 - b^2 - b + 4 + (-2ab + a)i$.

Exercice 4. 1. Calculer le module des nombres complexes suivants :

a) $z = 2 + 5i$, b) $z = -3 + 2i$, c) $z = (3 - 2i)(9 + i)$, d) $z = \dfrac{2 + 5i}{5 - 2i}$.

Réponses.

a) $\sqrt{29}$; b) $\sqrt{13}$; c) $\sqrt{13 \cdot 82} = \sqrt{1066}$; d) 1.

2. Soit z un complexe, $z \neq 0$. Exprimer le module des complexes suivants à l'aide du module de z :

a) $z\bar{z}$, b) $2z^2$, c) $\dfrac{2}{\bar{z}}$, d) $3\dfrac{\bar{z}^2}{z}$.

Réponses.

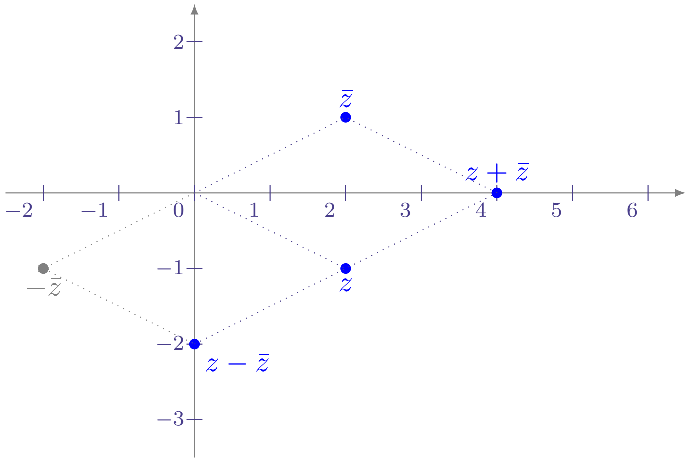
a) $|z\bar{z}| = |z|^2$, b) $|2z^2| = 2|z|^2$, c) $\left|\dfrac{2}{\bar{z}}\right| = \dfrac{2}{|z|}$, d) $\left|3\dfrac{\bar{z}^2}{z}\right| = 3\,|z|$.

Exercice 5. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Établir la relation $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\big(|z|^2 + |z'|^2\big)$ et en donner une interprétation géométrique.

Exercice 6. 1. Représenter les points d'affixes suivantes dans le plan muni d'un repère orthonormé :

a) $z = 2 - i$, b) $\bar{z}$, c) $z + \bar{z}$, d) $z - \bar{z}$.

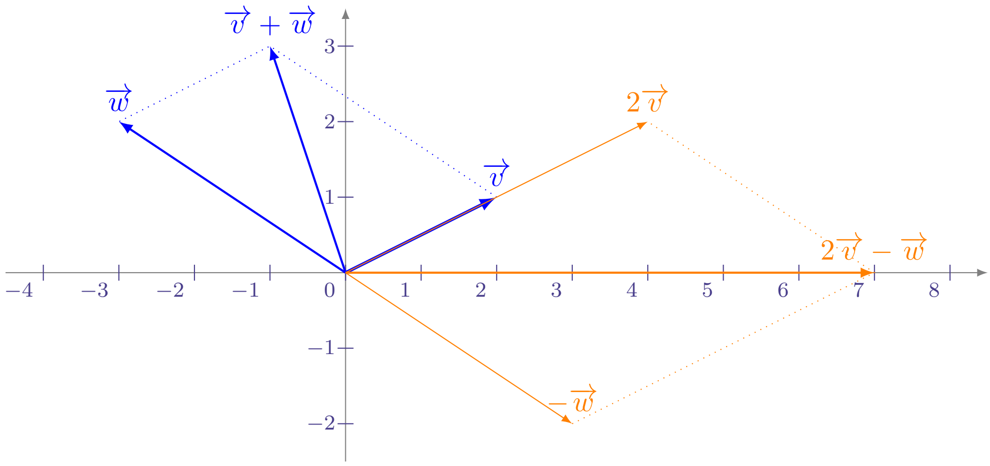
Réponse.



2. Représenter les vecteurs suivants dans le plan muni d'un repère orthonormé :

a) $\overrightarrow{v}$ d'affixe $2+i$, b) $\overrightarrow{w}$ d'affixe $-3+2i$, c) $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$, d) $2\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$.

Réponse.



Équations et inéquations de degré un et deux

Exercice 7. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

a) $|1-z| \leq \dfrac{1}{2}$, b) $\mathrm{Re}(1-z) \leq \dfrac{1}{2}$, c) $\mathrm{Re}(iz) \leq \dfrac{1}{2}$, d) $\left|1 - \dfrac{1}{z}\right|^2 = 2$, e) $\left|\dfrac{z-3}{z+3}\right| < 2$.

Réponses. Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$, de sorte que $z = x + yi$.

a) Soit A le point d'affixe 1 et soit M le point d'affixe z. Vu que $1-z$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MA}$ et que le module d'un nombre complexe w est la distance de l'origine au point P d'affixe w, c'est-à-dire la norme du vecteur $\overrightarrow{OP}$, on a : $|1-z| = MA$ – la distance entre A et M.
Bref, l'ensemble des z tels que $|1-z| \leq 1/2$ correspond à l'ensemble des M tels que $AM \leq 1/2$: c'est le disque de centre A et de rayon $1/2$ (figure 1).

b) On écrit $1 - z = 1 - (x + yi) = 1 - x - yi$, d'où $\mathrm{Re}(1-z) = 1 - x$. On a : $\mathrm{Re}(1-z) \leq 1/2 \iff 1 - x \leq 1/2 \iff x \geq 1/2$. La condition ne porte que sur x et pas sur y : elle signifie que tous les points dont l'abscisse x est supérieure à $1/2$ conviennent (cf. figure 2).

c) On calcule : $\mathrm{Re}(iz) = \mathrm{Re}(-y + xi) = -y$, de sorte que $\mathrm{Re}(iz) \leq 1/2 \iff y \geq -1/2$.

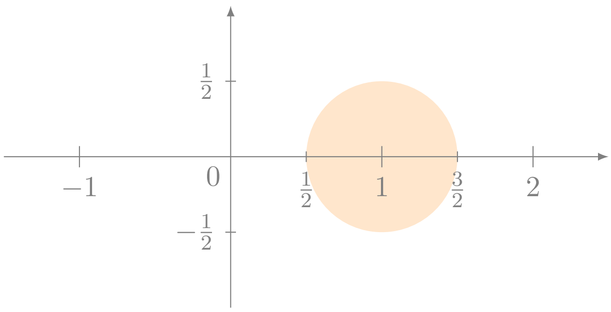


FIGURE 1 – Ensemble des z tels que $|1-z| \leq 1/2$

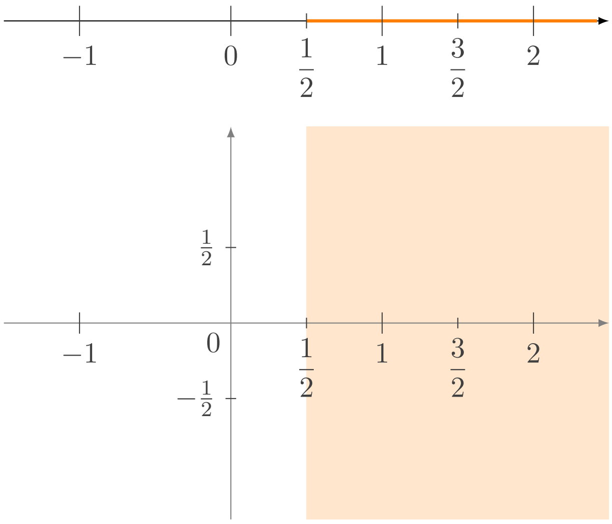


FIGURE 2 – Ensemble des x tels que $x \geq 1/2$ et des z tels que $\mathrm{Re}(1-z) \leq 1/2$

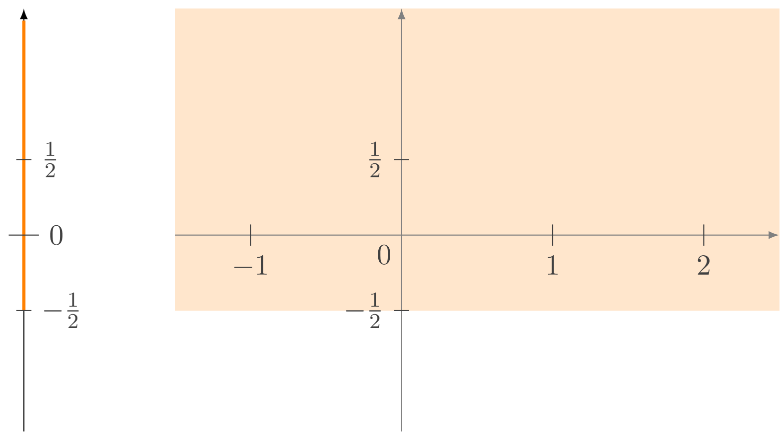


FIGURE 3 – Ensemble des y tels que $y \geq -1/2$ et des z tels que $\mathrm{Re}(iz) \leq 1/2$

d) Ici on suppose $z \neq 0$ (pourquoi ?). On a successivement :

$$\begin{aligned}
\left|1-\frac{1}{z}\right|^2 = 2 &\iff \left|\frac{z-1}{z}\right|^2 = 2 \\
&\iff |z-1|^2 = 2|z|^2 \\
&\iff (x-1)^2 + y^2 = 2\big(x^2+y^2\big) && (z-1 = x-1+yi) \\
&\iff x^2 - 2x + 1 + y^2 = 2x^2 + 2y^2 \\
&\iff x^2 + 2x + y^2 = 1 \\
&\iff (x+1)^2 - 1 + y^2 = 1 \\
&\iff |z+1|^2 = 2 && (z+1 = x+1+yi).
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble cherché est le cercle de centre le point d'affixe -1 et de rayon $\sqrt{2}$.

e) Ici on suppose que $z =\neq -3$ (pourquoi ?). On a alors :

$$\begin{aligned}\left|\frac{z-3}{z+3}\right| < 2 &\iff |z-3|^2 < 4|z+3|^2 \\ &\iff (x-3)^2+y^2 < 4\big((x+3)^2+y^2\big) \\ &\iff x^2-6x+9+y^2 < 4x^2+24x+36+4y^2 \\ &\iff x^2+10x+y^2+9 > 0 \\ &\iff (x+5)^2+y^2 > 16 \\ &\iff |z+5|^2 > 16.\end{aligned}$$

L'ensemble cherché est l'extérieur du disque de centre le point d'affixe -5 et de rayon 4.

Exercice 8. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations et le système suivants :

a) $z^2 = 2$, b) $z^2 = -2$, c) $z^2 = -2i$,

d) $z^2 = \bar{z}$, e) $z^3 = 1$, f) $\begin{cases} z^2 = w \\ w^2 = z. \end{cases}$

Pour la question e), on pourra commencer par développer $(z-1)(z^2+z+1)$.

Solution. Ici on utilise sans plus de procès la propriété bien connue :

dans $\mathbb{C}$, un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

Soit $z \in \mathbb{C}$.

a) On a :

$$z^2 = 2 \iff z^2-2 = 0 \iff \big(z-\sqrt{2}\big)\big(z+\sqrt{2}\big) = 0 \iff \begin{cases} z-\sqrt{2} = 0 \\ \text{ou} \\ z+\sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

donc les deux racines carrées complexes de 2 sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

b) Il suffit de trouver une racine carrée, la suite de la résolution se déroule comme ci-dessus – et montre que l'autre racine carrée est l'opposée de la première. Pour le produit de -1 par 2, on exprime séparément -1 comme un carré – le carré de i – et 2 comme un carré – le carré de $\sqrt{2}$:

$$-2 = -1 \times 2 = i^2 \times \sqrt{2}^2 = \big(i\sqrt{2}\big)^2$$

donc $i\sqrt{2}$ est une racine de -2 et :

$$z^2 = -2 \iff z^2-(-2) = 0 \iff z^2 - \big(i\sqrt{2}\big)^2 = 0 \iff \big(z-i\sqrt{2}\big)\big(z+i\sqrt{2}\big) = 0$$

de sorte que les racines carrées de $-2i$ sont $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$.

c) *Première solution* (en trichant). On se souvient qu'on a calculé en CM : $(1+i)^2 = 1-1+2i = 2i$. Pour trouver $-2i$ à la place, il suffit d'exprimer -1 comme un carré :

$$-2i = -1 \times 2i = i^2 \times (1+i)^2 = \big(i(1+i)\big)^2 = (-1+i)^2$$

donc les racines carrées de $-2i$ sont $-1+i$ et $1-i$.

Deuxième solution (la plus naturelle). On cherche z sous la forme $z = x+yi$ avec x et y réels. Alors $z^2 = x^2-y^2+2xyi$ donc

$$z^2 = -2i \iff x^2-y^2+(2xy+2)i = 0 \iff \begin{cases} x = \pm y \\ 2(xy+1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \text{ et } y = -1 \\ \text{ou} \\ x = -1 \text{ et } y = 1. \end{cases}$$

Ainsi les racines carrées de $-2i$ sont $1-i$ et $-1+i$.
Troisième solution. On procède essentiellement comme dans la deuxième solution mais on ajoute l'équation redondante $|z|^2 = |-2i|$:

$$z^2 = -2i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 + 2xyi = -2i \\ |x+yi|^2 = |-2i| \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 & (L_1) \\ 2xy = -2 & (L_2) \\ x^2 + y^2 = 2 & (L_3) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x^2 = 1 & \frac{1}{2}(L_1 + L_3) \\ y^2 = 1 & \frac{1}{2}(-L_1 + L_3) \\ xy = -1 & (L_2) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = 1 \text{ et } y = -1 \\ \text{ou} \\ x = -1 \text{ et } y = 1. \end{cases}$$

Ainsi les racines carrées de $-2i$ sont $1-i$ et $-1+i$.

d) On cherche z sous la forme $z = x + yi$ avec x et y réels :

$$z^2 = \bar{z} \iff x^2 - y^2 + 2xyi = x - yi \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = x \\ 2xy = -y \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + x = y \\ (2x+1)y = 0. \end{cases}$$

La deuxième équation donne deux cas :
- soit $y = 0$, auquel cas $0 = x^2 + x = x(x+1)$ d'où $x = y = 0$ ou $[x = -1$ et $y = 0]$, ce qui fait deux solutions complexes : $z = 0$ et $z = -1$;
- soit $2x + 1 = 0$, c'est-à-dire $y^2 = \frac{3}{4}$ et $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

e) On a :

$$z^3 - 1 = 0 \iff z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1) = 0 \iff \begin{cases} z - 1 = 0 \\ z^2 + z + 1 = 0. \end{cases}$$

Deux solutions raisonnables pour la deuxième équation.
Première solution. On cherche z sous la forme $z = x + yi$ avec x et y réels. Alors $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ donc l'équation équivaut successivement à :

$$x^2 - y^2 + x + 1 + (2xy + y)i = 0 \iff \begin{cases} x^2 - y^2 + x + 1 = 0 \\ (2x+1)y = 0. \end{cases}$$

Ainsi, $y = 0$ ou $x = -1/2$. Si $y = 0$ la première équation devient $x^2 + x + 1 = 0$, équation qui n'a pas de solution réelle (calculer le discriminant ou étudier les variations ou mettre sous forme canonique). D'où $x = -1/2$, puis $y^2 = x^2 + x + 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}$ et $y = \pm\sqrt{3}/2$. D'où les deux solutions attendues, $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$.
Deuxième solution. On met sous forme canonique en reconnaissant dans $z^2 + z$ le début d'un carré :

$$\begin{aligned} z^2 + z + 1 &= \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \\ &= \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^2 = \left(z^2 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\left(z + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right), \text{ etc.} \end{aligned}$$

Au bilan, trois solutions : $\left\{1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right\}$.

f) Supposons que (z, w) soit solution du système. Alors

$$z = w^2 = (z^2)^2 = z^4$$

donc $z(z^3 - 1) = 0$. Ainsi, z est nul ou z est solution de l'équation précédente. On calcule $w = z^2$ dans chaque cas et on vérifie que les couples obtenus fonctionnent, ce qui donne quatre solutions :

$$z = w = 0, \qquad z = w = 1, \qquad z = \bar{w} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad z = \bar{w} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. \qquad \square$$

Exercice 9. On note

$$j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

1. Calculer $j^2 + j + 1$ et j^3, puis j^4.
2. Déterminer les racines carrées ω et $-\omega$ de j, puis les racines carrées ζ et $-\zeta$ de ω et enfin les racines quatrièmes de j.
3. Dessiner tous ces nombres dans un plan muni d'un repère orthonormé.

Réponses. 1. On a :

$$\begin{aligned} j^2 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \overline{j}\ ; \\ j^2 + j + 1 = 0\ ; & \\ j^3 &= j\overline{j} = 1\ ; \\ j^4 &= j. \end{aligned}$$

2. En cherchant sous la forme $x + yi$, on trouve $\pm\omega = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i = \mp\overline{j}$.
Avec $j^4 = j$ on voit que $j^2 = \pm\omega$. Ou bien on bourrine à nouveau.
Les racines quatrièmes de j sont j, $\overline{j} = j^2$, $\omega = -\overline{j}$ et $\overline{\omega} = -j$.
3. Voir dessin.

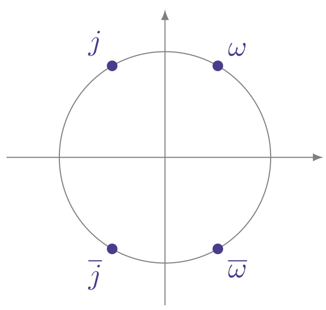


FIGURE 4 – Racines carrées et quatrièmes de j

Exercice 10. 1. Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

a) $z = 7 + 24i$, b) $z = 9 + 40i$, c) $z = 1 + i$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 = -2\sqrt{3} + 2i$, b) $z^2 = 3 - 4i$, c) $z^3 + 3z - 2i = 0$.

Réponses. 1. Première salve :

a) $z = 7 + 24i : \pm(4 + 3i)$; b) $z = 9 + 40i : \pm(5 + 4i)$; c) $\pm\frac{\sqrt[4]{2}}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) compliqué... b) $\pm(2 - i)$, c) i (double) et $-2i$.

Solution. Dans cet exercice, on utilise la méthode générale standard sans fioritures, consistant à résoudre $z^2 = A$ en cherchant z sous la forme $z = x + yi$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ et en ajoutant l'équation redondante $|z|^2 = |A|$. Une fois pour toutes, si $z = x + yi$ et $A = a + bi$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$), alors

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \quad \text{et} \quad |A| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

a) On a :

$$\begin{aligned}
z^2 = 7 + 24i &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 + 2xyi = 7 + 24i \\ |z|^2 = |7 + 24i| \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 7 & (L_1) \\ 2xy = 24 & (L_2) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{625} = 25 & (L_3) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 = \frac{7+25}{2} = 16 = 4^2 & \frac{1}{2}(L_1 + L_3) \\ y^2 = \frac{-7+25}{2} = 9 = 3^2 & \frac{1}{2}(-L_1 + L_3) \\ xy = 12 & (L_2) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 4 \text{ et } y = 3 \\ \text{ou} \\ x = -4 \text{ et } y = -3. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi les racines de $7 + 24i$ sont $4 + 3i$ et $-4 - 3i$.

b) On a :

$$\begin{aligned}
z^2 = 9 + 40i &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 + 2xyi = 9 + 40i \\ |z|^2 = |9 + 40i| \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 9 & (L_1) \\ 2xy = 40 & (L_2) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{9^2 + 40^2} = \sqrt{1681} = 41 & (L_3) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 = \frac{9+41}{2} = 25 = 5^2 & \frac{1}{2}(L_1 + L_3) \\ y^2 = \frac{-9+41}{2} = 16 = 4^2 & \frac{1}{2}(-L_1 + L_3) \\ xy = 20 & (L_2) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 5 \text{ et } y = 4 \\ \text{ou} \\ x = -5 \text{ et } y = -4. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi les racines de $9 + 40i$ sont $5 + 4i$ et $-5 - 4i$.

Pour l'anecdote (et retrouver ce qui a été fait en groupe B), les racines de $9 - 40i$ se trouvent par la même méthode ou bien, une fois qu'on a celles de $9 + 40i$, par conjugaison : en effet, sachant que $\big(\pm(5 + 4i)\big)^2 = 9 + 40i$ on tire que $\big(\pm(5 - 4i)\big)^2 = 9 - 40i$.

c) On a :

$$
\begin{aligned}
z^2 = 1+i &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 + 2xyi = 1+i \\ |z|^2 = |1+i| \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 & (L_1) \\ 2xy = 1 & (L_2) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} & (L_3) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2} & \frac{1}{2}(L_1+L_3) \\ y^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2} & \frac{1}{2}(-L_1+L_3) \\ xy = \frac{1}{2} & (L_2) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \text{ et } y = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \text{ et } y = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ainsi les racines de $1+i$ sont $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$ et $-\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$.

Comme on le verra, la partie réelle et la partie imaginaire sont $\sqrt[4]{2}\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\sqrt[4]{2}\sin\dfrac{\pi}{8}$. □

Exercice 11. 1. Déterminer une racine carrée de $\Delta = 32 - 24i$.

2. En déduire les solutions de l'équation $2z^2 - (2+6i)z - 8 + 6i = 0$.

Réponses. 1. $\pm(6-2i)$.

2. $2+i$, $-1+2i$.

Exercice 12. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $iz^2 + (1-5i)z - 2 + 6i = 0$,

b) $(1+2i)z^2 - (9+3i)z + 10 - 5i = 0$,

c) $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$.

Réponses. 1. Discriminant : $\Delta = -2i = (1-i)^2$; solutions : 2 et $3+i$.

2. Discriminant : $\Delta = -8-6i = (1-3i)^2$; solutions : $2-i$ et $1-2i$.

3. Discriminant de $x^2+10x+169$: $\Delta = -576 = \left(2^3 \times 3i\right)^2$; solutions : $-5 \pm 12i$. On a à résoudre $x^2 - y^2 = -5$ et $x^2 + y^2 = 13$, d'où $x = \pm 2$ et $y = \pm 3$, d'où les quatre solutions : $\pm 2 \pm 3i$.
NB : discriminant réduit[1] de $x^2+10x+169$: $\Delta' = 25 - 169 = -144 = (12i)^2$; solutions de $x^2+10x+169$: $-5 \pm 12i$; on termine idem.

Module et argument

Exercice 13. Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$, puis $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$.
2. Linéariser $\sin^4(x)$ puis $\cos(x)\sin^4(x)$.

Exercice 14. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \text{ et } V_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$$

1. Le discriminant réduit de $ax^2 + 2b'x + c$ est $\Delta' = b'^2 - ac$; si $\delta'^2 = \Delta'$, les solutions sont alors $(-b' \pm \delta')/a$.

Exercice 15. 1. Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants :

a) $u=-3$, b) $v=1-i$, c) $w=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$, d) $z=\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$.

2. En déduire le module et un argument de uw et $\frac{z}{v}$.

Exercice 16. Soit $z=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

1. Calculer z^2, déterminer le module et un argument de z^2 et écrire z^2 sous forme trigonométrique.
2. En déduire le module et un argument de z.
3. En déduire une expression de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 17. 1. Donner la forme trigonométrique de $(1+i)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ (utiliser la formule de Moivre).

2. En déduire une expression très simple de $(1+i)^n+(1-i)^n$.

Racines n-ièmes

Exercice 18. Soient $z\in\mathbb{C}^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Il existe exactement n nombres complexes w vérifiant $w^n=z$. Ces nombres sont appelés les *racines n-ièmes* de z.

1. Représenter dans le plan complexe les six racines sixièmes de 1 et les quatre racines quatrièmes de -1.
2. Soit $n\geq 2$ un entier. Déterminer les $n-1$ racines du polynôme complexe $1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}$.

Exercice 19. Déterminer l'ensemble des racines n-ièmes des nombres complexes suivants :

a) $z=e^{i\frac{3}{4}\pi}$ pour $n=3$, b) $z=e^{i\frac{\pi}{5}}$ pour $n=4$, c) $z=-1$ pour $n=5$.

Exercice 20. (Comparer avec l'exercice 9.)

1. Déterminer les racines cubiques de 1 et les représenter dans le plan complexe.
2. On note $j=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Montrer que $1+j+j^2=0$.
3. Exprimer les racines cubiques de 1 en fonction de j.

Exercice 21. (Comparer avec l'exercice 9.)

1. Donner les solutions complexes de $z^4=1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4=-\dfrac{1}{2}-i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 22. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^6-(3+2i)z^3+2+2i=0$, b) $\bar{z}^7=\frac{1}{z^2}$,

c) $z^5-z=0$, d) $27(z-1)^6+(z+1)^6=0$.

Exercice 23. Soit $c\in\mathbb{C}$ tel que $|c|<1$.

1. Montrer que $|z+c|\leq|1+\bar{c}z|$ si et seulement si $|z|\leq 1$.
2. On notera $D=\{z\in\mathbb{C},|z|\leq 1\}$ le disque unité et $C=\{z\in\mathbb{C},|z|=1\}$ le cercle unité. Montrer que l'application
$$\begin{array}{rccc} f: & D & \to & D \\ & z & \mapsto & \frac{z+c}{1+\bar{c}z} \end{array}$$
est une bijection pour laquelle $f(C)=C$.

Exercice 24. Soit $f:x\mapsto\frac{z^2-1}{z(z+3)}$ définie sur $\mathbb{C}\backslash\{-3,0\}$. Calculer $f(1-i)$et $f(1+i)$.

Exercice 25. Soit $z = \frac{3}{\sqrt{3}+i}$. Calculer z^4.

Exercice 26.
1. Calculer $\cos^2(x)\sin^3(x)$ en fonction de $\sin(x)$.
2. Linéariser $\cos^4(x)$.

Exercice 27.
1. Donner les solutions complexes de $z^4 = 1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^8 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z^4 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

Exercice 28.
1. Déterminer les quatre nombres complexes a, b, c et d différents de 1 qui sont solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^5 = 1$.
2. Montrer que pour tout nombre complexe z, on a $1+z+z^2+z^3+z^4 = (z-a)(z-b)(z-c)(z-d)$.

Exercice 29. Sachant qu'elle admet une racine réelle, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^3 + (1-3i)z^2 - (6-i)z + 10i = 0$$

Exercice 30. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\frac{1}{2}z^6 + (1+3i)z^3 + 8 + 8i = 0$.

Exercice 31. On considère l'équation suivante :

$$z^4 - 3z^3 + (2-i)z^2 + 3z - 3 + i = 0 \tag{E}$$

1. Montrer que l'équation (E) admet 2 solutions réelles.
2. Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$

Exercice 32. On considère la fonction f suivante :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z(1-z) \end{array}$$

1. Déterminer les points fixes de f, c'est à dire résoudre $f(z) = z$.
2. Montrer que si $\left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$, alors $\left|f(z) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$.

Indication : on pourra remarquer que $z(1-z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - z\right) + \frac{1}{4}$.

Exercices du chapitre 1 du livre qui peuvent être utiles pour s'entraîner :

— exercices 1, 2, 3, 4, 5, 6 ;

— exercices 8, 9, 10, 11, 12 ;

— exercices 21, 22, 23, 24 ;

— exercices 30, 38.

Vous pouvez aborder aussi les autres exercices du livre : plus d'exercices vous traitez, plus vous serez entraîné·e !