Université Claude Bernard Lyon 1
L1 de mathématiques : Algèbre 1B
Année 2023–2024, printemps

Factorisation des polynômes

Théorème 1. *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul à coefficients complexes. Soit d son degré et soit a_d son coefficient dominant. Il existe un entier $r \geqslant 1$ unique et des couples $(z_1, m_1), \dots, (z_r, m_r) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}^*$ uniques à l'ordre près tels que*

$$P(X) = a_d \prod_{k=1}^{r} (X - z_k)^{m_k} = a_n (X - z_1)^{m_1} \cdots (X - z_r)^{m_r}.$$

Remarque. On a alors $d = m_1 + \cdots + m_s$.

Théorème 2. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non nul à coefficients réels. Soit d son degré et soit a_d son coefficient dominant. Il existe :*

- *un entier $s \geqslant 0$ unique et des couples $(x_1, m_1), \dots, (x_s, m_s) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}^*$, uniques à l'ordre près,*
- *un entier $t \geqslant 0$ unique et des couples $(b_1, c_1), \dots, (b_t, c_t) \in \mathbb{R}^2$ tels que $b_j^2 - 4c_j < 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, t\}$, uniques à l'ordre près,*

tels que

$$\begin{aligned} P(X) &= a_d \prod_{k=1}^{s} (X - x_k)^{m_k} \cdot \prod_{l=1}^{t} (X^2 + b_l X + c_l)^{n_l} \\ &= a_d (X - x_1)^{m_1} \cdots (X - x_s)^{m_s} (X^2 + b_1 X + c_1)^{n_1} \cdots (X^2 + b_t X + c_t)^{n_t}. \end{aligned}$$

Remarque. On a alors $d = m_1 + \cdots + m_s + 2n_1 + \cdots + 2n_t$.

Université Claude Bernard Lyon 1
L1 de mathématiques : Algèbre 1B
Année 2023–2024, printemps

Factorisation des polynômes

Théorème 1. *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul à coefficients complexes. Soit d son degré et soit a_d son coefficient dominant. Il existe un entier $r \geqslant 1$ unique et des couples $(z_1, m_1), \dots, (z_r, m_r) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}^*$ uniques à l'ordre près tels que*

$$P(X) = a_d \prod_{k=1}^{r} (X - z_k)^{m_k} = a_n (X - z_1)^{m_1} \cdots (X - z_r)^{m_r}.$$

Remarque. On a alors $d = m_1 + \cdots + m_s$.

Théorème 2. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non nul à coefficients réels. Soit d son degré et soit a_d son coefficient dominant. Il existe :*

- *un entier $s \geqslant 0$ unique et des couples $(x_1, m_1), \dots, (x_s, m_s) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}^*$, uniques à l'ordre près,*
- *un entier $t \geqslant 0$ unique et des couples $(b_1, c_1), \dots, (b_t, c_t) \in \mathbb{R}^2$ tels que $b_j^2 - 4c_j < 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, t\}$, uniques à l'ordre près,*

tels que

$$\begin{aligned} P(X) &= a_d \prod_{k=1}^{s} (X - x_k)^{m_k} \cdot \prod_{l=1}^{t} (X^2 + b_l X + c_l)^{n_l} \\ &= a_d (X - x_1)^{m_1} \cdots (X - x_s)^{m_s} (X^2 + b_1 X + c_1)^{n_1} \cdots (X^2 + b_t X + c_t)^{n_t}. \end{aligned}$$

Remarque. On a alors $d = m_1 + \cdots + m_s + 2n_1 + \cdots + 2n_t$.