Université Claude Bernard Lyon 1 — **Semestre de printemps 2023–2024**

L1 mathématiques-informatique — UE : Algèbre 1 B (MAT1070L)

Contrôle du 9 avril 2024

Sujet A

Durée : 1 heure

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct.

Important : indiquer la lettre du sujet (A ou B) sur la copie

Exercice 1. Questions rapides (mais justifier brièvement les réponses).

a) Soient a et b deux nombres *complexes*. Calculer la partie imaginaire de $\mathrm{i}\,a + b$.

b) Calculer le degré du polynôme $A(X) = X^4 + X^2 - 5X^{1789} - 7X - 3$.

c) Vrai ou faux ? le nombre complexe i est une racine de $B(X) = -3X^3 + 2\,\mathrm{i}\,X^2 + 2X - 3\,\mathrm{i}$.

Solution. a) On écrit $a = \mathrm{Re}(a) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(a)$ et $b = \mathrm{Re}(b) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(b)$. Alors

$$\mathrm{i}\,a + b = \mathrm{i}\,\mathrm{Re}(a) - \mathrm{Im}(a) + \mathrm{Re}(b) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(b) = -\mathrm{Im}(a) + \mathrm{Re}(b) + \mathrm{i}\big(\mathrm{Re}(a) + \mathrm{Im}(b)\big)$$

donc $\mathrm{Im}(\mathrm{i}\,a + b) = \mathrm{Re}(a) + \mathrm{Im}(b)$.

b) Le monôme de degré maximal qui apparaît dans $A(X)$ est $-5X^{1789}$ donc son degré est 1789.

c) On calcule

$$B(\mathrm{i}) = -3\,\mathrm{i}^3 + 2\,\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}^2 + 2\,\mathrm{i} - 3\,\mathrm{i} = 3\,\mathrm{i} - 2\,\mathrm{i} + 2\,\mathrm{i} - 3\,\mathrm{i} = 0$$

donc i est bien une racine de B. □

Exercice 2. Soit $\omega = \exp(2\mathrm{i}\pi/7)$.

1. Déterminer le plus petit entier naturel n non nul tel que ω est une racine de $X^n - 1$.
2. Calculer $S = 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6$.
3. Exprimer $\overline{\omega}$, ω^8, ω^9 et ω^{10} sous la forme ω^k avec $0 \leq k \leq 6$.
4. On pose
$$A = \omega + \omega^2 + \omega^4.$$
Calculer $A\overline{A}$ et en déduire que $|A| = \sqrt{2}$.
5. Déterminer le module et un argument des racines quatrièmes de $16\,\omega^3$. [Indépendant de 4.]

Solution. 1. On cherche le plus petit $n \geq 1$ tel que $\omega^n = 1$. Or $\omega^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2n\pi}{7}}$ donc $\omega^n = 1$ si et seulement s'il existe k tel que $2n\pi = 7 \times 2k\pi$, c'est-à-dire que n est un multiple non nul de 7. Le plus petit multiple non nul est $n = 7$.

2. On reconnaît la somme des termes d'une série géométrique de premier terme 1 et de raison ω :

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = \frac{1 - \omega^7}{1 - \omega} = 0.$$

3. Comme $|\omega| = 1$, on a $\omega\overline{\omega} = 1$ donc $\overline{\omega} = \omega^{-1} = \omega^6$.

   On calcule par ailleurs : $\omega^8 = \omega^7\omega = \omega$, $\omega^9 = \omega^7\omega^2 = \omega^2$ et $\omega^{10} = \omega^7\omega^3 = \omega^3$.

4. On calcule

$$\overline{A} = \overline{\omega + \omega^2 + \omega^4} = \overline{\omega} + \overline{\omega}^2 + \overline{\omega}^4 = \omega^6 + \omega^{-2} + \omega^{-4} = \omega^6 + \omega^5 + \omega^3,$$

   d'où

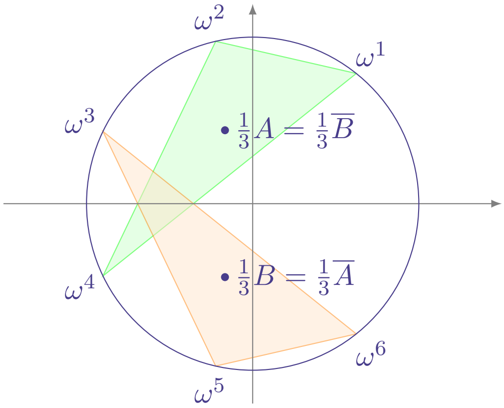
$$A\overline{A} = (\omega + \omega^2 + \omega^4)(\omega^3 + \omega^5 + \omega^6) = \underbrace{\omega^4 + \omega^6 + 1}_{\omega\times ?} + \underbrace{\omega^5 + 1 + \omega}_{\omega^2\times ?} + \underbrace{1 + \omega^2 + \omega^3}_{\omega^4\times ?} = S + 2 = 2$$

   et $|A| = \sqrt{2}$.

5. Pour $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on doit savoir qu'une racine quatrième de $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est $r^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{4}}$. Ici on a $r = 16$ et $16^{\frac{1}{4}} = \sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2$. $16\,\omega^3 = 16\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{6\pi}{7}} = 2^4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\cdot 3\pi}{14}} = \left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{14}}\right)^4$. Ensuite, les autres racines quatrièmes s'obtiennent en multipliant l'une d'entre elles par une racine quatrième de 1, c'est-à-dire $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{2}}$ pour $0 \leq k \leq 3$.

   Les racines quatrièmes de A sont donc $2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{14}}$, $2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{14}+\frac{\pi}{2}\right)} = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{10\pi}{14}} = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{7}}$, $2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{14}+\frac{2\pi}{2}\right)} = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{17\pi}{14}} = -2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{14}}$ et $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{14}+\frac{3\pi}{2}\right)} = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{24\pi}{14}} = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{12\pi}{7}}$. □

NB : le nombre complexe A est le conjugué du B du sujet B... Voir la figure ci-dessous et la remarque à la fin de la correction de l'exercice correspondant.



Exercice 3. Soient α et β deux réels et soit P le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par

$$P(X) = X^4 + \alpha X^3 - 3X^2 - 11X + \beta.$$

On suppose que -1 est une racine double de P.

1. Calculer le polynôme dérivé $P'(X)$.
2. Calculer α et β.
3. Déterminer un polynôme Q de degré 2 tel que

$$P(X) = (X+1)^2 Q(X).$$

   On pourra soit poser une division euclidienne, soit chercher Q sous la forme $Q(X) = aX^2 + bX + c$ et remarquer que a et c sont très faciles à calculer.

4. Calculer enfin toutes les racines de P.

Solution. 1. On sait que $(X^n)' = nX^{n-1}$ pour tout n – avec $(X^0)' = 0$, c'est-à-dire la convention $0X^{-1} = 0$ – et que la dérivation est linéaire (i.e. $(P_1 + P_2)' = P_1' + P_2'$ et $(\lambda P_1)' = \lambda P_1'$ pour λ réel et P_1, P_2 polynômes quelconques). D'où

$$P'(X) = 4X^3 + 3\alpha X^2 - 6X - 11.$$

2. On sait que -1 est une racine double de P si et seulement si $P(-1) = P'(-1) = 0$. Cela donne un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} 0 = P(-1) = 1 - \alpha - 3 + 11 + \beta \\ 0 = P'(-1) = -4 + 3\alpha + 6 - 11 \end{cases} \iff \begin{cases} -\alpha + \beta = -9 \\ 3\alpha = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -6. \end{cases}$$

3. *Première solution :* avec une division euclidienne.

$$\begin{array}{rl|l} & X^4 + 3X^3 - 3X^2 - 11X - 6 & X^2 + 2X + 1 \\ \cline{3-3} \ominus & X^4 + 2X^3 \ \ + X^2 & X^2 + X - 6 \\ \cline{2-2} & X^3 - 4X^2 - 11X & \\ \ominus & X^3 + 2X^2 \quad + X & \\ \cline{2-2} & -6X^2 - 12X - 6 & \\ \ominus & -6X^2 - 12X - 6 & \\ \cline{2-2} & 0 & \end{array}$$

Cela signifie que $P(X) = (X + 1)^2\,(X^2 + X - 6)$.

Deuxième solution. On cherche a, b, c tels que $P(X) = (X^2 + 2X + 1)(aX^2 + bX + c)$. Nécessairement, a étant le coefficient dominant du produit, on a $a = 1$; de même, c est le coefficient constant de P donc $-6 = P(0) = c$. Reste à trouver une condition sur b :

$$(X^2 + 2X + 1)(X^2 + bX - 6) = X^4 + (b + 2)X^3 + (-6 + 2b + 1)X^2 + (b - 12)X - 6$$

donc, en identifiant coefficient par coefficient, il vient :

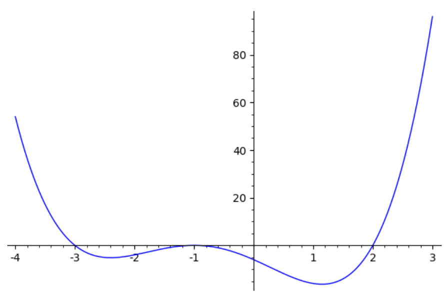
$$P(X) = (X^2 + 2X + 1)(X^2 + bX - 6) \iff \begin{cases} b + 2 = 3 \\ 2b - 5 = -3 \\ b - 12 = -11 \end{cases} \iff b = 1.$$

Cela démontre que $P(X) = (X + 1)^2\,(X^2 + X - 6)$.

4. On n'a plus qu'à résoudre l'équation $x^2 + x - 6 = 0$. Le discriminant est $1 + 4 \cdot 6 = 25 = 5^2$ donc les racines de $X^2 + X - 6$ sont

$$\frac{-1 + 5}{2} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{-1 - 5}{2} = -3.$$

Ainsi, les racines de P sont -1 (avec multiplicité 2), 2 et -3. $\square$



Pour l'anecdote, on a représenté ci-dessus le graphe de la fonction polynomiale associée à P, c'est-à-dire la fonction $\tilde{P} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6$.

Université Claude Bernard Lyon 1 **Semestre de printemps 2023–2024**

L1 mathématiques-informatique UE : Algèbre 1 B (MAT1070L)

Contrôle du 9 avril 2024

Sujet B

Durée : 1 heure

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct.

Important : indiquer la lettre du sujet (A ou B) sur la copie

Exercice 1. Du tac au tac – justifier brièvement les réponses.

a) Soient a et b deux nombres *complexes*. Calculer la partie réelle de $a + \mathrm{i}\, b$.

b) Calculer le degré de $A(X) = X^7 + X^3 - 7X^{1515} + 2X + 1$.

c) Vrai ou faux ? le nombre complexe i est une racine de $B(X) = -2X^3 + 3\,\mathrm{i}\, X^2 + X$.

Solution. a) On écrit $a = \mathrm{Re}(a) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(a)$ et $b = \mathrm{Re}(b) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(b)$. Alors

$$a + \mathrm{i}\, b = \mathrm{Re}(a) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(a) + \mathrm{i}\,\mathrm{Re}(b) - \mathrm{Im}(b) = \mathrm{Re}(a) - \mathrm{Im}(b) + \mathrm{i}\big(\mathrm{Im}(a) + \mathrm{Re}(b)\big)$$

donc $\mathrm{Re}(a + \mathrm{i}\, b) = \mathrm{Re}(a) - \mathrm{Im}(b)$.

b) Le monôme de plus haut degré qui apparaît dans A est $-7X^{1515}$ donc le degré de A est 1515.

c) On calcule

$$B(\mathrm{i}) = -2\,\mathrm{i}^3 + 3\,\mathrm{i} \cdot \mathrm{i}^2 + \mathrm{i} = \mathrm{i}^3 + \mathrm{i} = 0$$

donc i est bien une racine de $B(X)$. □

Exercice 2. Soit $\omega = \exp(2\mathrm{i}\pi/7)$.

1. Déterminer le plus petit entier naturel n non nul tel que ω est une racine de $X^n - 1$.
2. Calculer $T = \omega^{-3} + \omega^{-2} + \omega^{-1} + 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3$.
3. Exprimer $\overline{\omega}$, $\overline{\omega^3}$, $\overline{\omega^5}$ et $\overline{\omega^6}$ sous la forme ω^k avec $-6 \leq k \leq 0$.
4. On pose
$$B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6.$$
Calculer $B\overline{B}$ et en déduire que $|B| = \sqrt{2}$.
5. Déterminer le module et un argument des racines cubiques de $8\,\omega^2$. [Indépendant de 4.]

Solution. 1. On cherche le plus petit $n \geq 1$ tel que $\omega^n = 1$. Or $\omega^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2n\pi}{7}}$ donc $\omega^n = 1$ si et seulement s'il existe k tel que $2n\pi = 7 \times 2k\pi$, c'est-à-dire que n est un multiple non nul de 7. Le plus petit multiple non nul est $n = 7$.

2. On reconnaît la somme des termes d'une série géométrique de premier terme ω^{-3} et de raison ω :

$$\omega^{-3} + \omega^{-2} + \omega^{-1} + 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 = \omega^{-3}\frac{1 - \omega^7}{1 - \omega} = 0.$$

3. Comme $|\omega| = 1$, on a $\omega\overline{\omega} = 1$ donc $\overline{\omega} = \omega^{-1}$.
   On calcule alors : $\overline{\omega^3} = \overline{\omega}^3 = \omega^{-3}$, $\overline{\omega^5} = \overline{\omega}^5 = \omega^{-5}$ et $\overline{\omega^6} = \overline{\omega}^6 = \omega^{-6}$.
4. On calcule
$$\overline{B} = \overline{\omega^3 + \omega^5 + \omega^6} = \omega^{-3} + \omega^{-5} + \omega^{-6},$$
   d'où
$$B\overline{B} = (\omega^3+\omega^5+\omega^6)(\omega^{-3}+\omega^{-5}+\omega^{-6}) = \underbrace{1 + \omega^{-2} + \omega^{-3}}_{\omega^3\times?} + \underbrace{\omega^2 + 1 + \omega^{-1}}_{\omega^5\times?} + \underbrace{\omega^3 + \omega^2 + 1}_{\omega^6\times?} = T+2 = 2$$
   et $|B| = \sqrt{2}$.
5. On a $8\,\omega^2 = 8\,e^{i\,\frac{4\pi}{7}} = 2^3 e^{i\,\frac{3\cdot 4\pi}{21}} = \left(2e^{i\,\frac{4\pi}{21}}\right)^3$
   Les racines cubiques de $8\omega^2$ sont donc $2e^{i\frac{4\pi}{21}}$, $2e^{i\left(\frac{4\pi}{21}+\frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{i\,\frac{6\pi}{7}}$ et $2e^{i\left(\frac{4\pi}{21}+\frac{4\pi}{3}\right)} = 2e^{i\,\frac{32\pi}{21}}$.

NB : le nombre complexe B est le conjugué du A du sujet A...

Remarque. On a ainsi
$$A = \omega + \omega^2 + \omega^4 \quad \text{et} \quad B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6.$$
On vient de montrer que $A = \overline{B}$ et que $AB = 2$. De plus, comme pour le calcul de S au sujet A ou de T ici, on a
$$A + B = \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = \omega\frac{1-\omega^6}{1-\omega} = \frac{\omega - \omega^7}{1-\omega} = \frac{\omega - 1}{1-\omega} = -1$$
(ou plus simplement $A + B = S - 1 = -1$). Il en résulte que A et B sont les racines de
$$(X - A)(X - B) = X^2 - (A + B)X + AB = X^2 + X + 2.$$
Le discriminant de ce polynôme de degré 2 est $1 - 4 \cdot 2 = -7$, ses racines carrées sont $\pm i\sqrt{7}$ donc les racines du polynômes sont $\left(-1 \pm i\sqrt{7}\right)/2$. On se convainc que $\mathrm{Im}(A) > 0$ et $\mathrm{Im}(B) < 0$, ce qui permet de conclure : $A = \left(-1 + i\sqrt{7}\right)/2$ et $B = \left(-1 - i\sqrt{7}\right)/2$. □

Exercice 3. Soient α et β deux réels et soit P le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par
$$P(X) = X^4 + 3X^3 + \alpha X^2 - 7X + \beta.$$
On suppose que 1 est une racine double de P.

1. Calculer le polynôme dérivé $P'(X)$.
2. Calculer α et β.
3. Déterminer un polynôme Q de degré 2 tel que
$$P(X) = (X - 1)^2 Q(X).$$
   On pourra soit poser une division euclidienne, soit chercher Q sous la forme $Q(X) = aX^2+bX+c$ et remarquer que a et c sont très faciles à calculer.
4. Calculer enfin toutes les racines de P.

Solution. 1. On sait que $\left(X^n\right)' = nX^{n-1}$ pour tout entier n (avec $\left(X^0\right)' = 0$, c'est-à-dire avec la convention $0X^{-1} = 0$) et que la dérivation est linéaire (i.e. $(P_1 + P_2)' = P_1' + P_2'$ et $(\lambda P_1)' = \lambda\, P_1'$ pour λ réel et P_1, P_2 polynômes quelconques). D'où
$$P'(X) = 4X^3 + 9X^2 + 2\alpha X - 7.$$

2. On sait que 1 est une racine double de P si et seulement si $P(1) = P'(1) = 0$. Cela donne un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} 0 = P(1) = 1 + 3 + \alpha - 7 + \beta \\ 0 = P'(1) = 4 + 9 + 2\alpha - 7 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ 2\alpha = -6 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -3 \\ \beta = 6. \end{cases}$$

3. *Première solution :* avec une division euclidienne.

$$\begin{array}{rrrrr|l} & X^4 & +3X^3 & -3X^2 & -7X \; +6 & X^2 - 2X + 1 \\ \cline{6-6} \ominus & X^4 & -2X^3 & +X^2 & & X^2 + 5X + 6 \\ \cline{1-4} & & 5X^3 & -4X^2 & -7X & \\ \ominus & & 5X^3 & -10X^2 & +5X & \\ \cline{2-5} & & & 6X^2 & -12X \; +6 & \\ \ominus & & & 6X^2 & -12X \; +6 & \\ \cline{3-5} & & & & 0 & \end{array}$$

Cela signifie que $P(X) = (X+1)^2 \, (X^2 + 5X + 6)$.

Deuxième solution. On cherche a, b, c tels que $P(X) = (X^2 - 2X + 1)(aX^2 + bX + c)$. Nécessairement, a étant le coefficient dominant du produit, on a $a = 1$; de même, c est le coefficient constant de P donc $6 = P(0) = c$. Reste à trouver une condition sur b :

$$(X^2 - 2X + 1)(X^2 + bX + 6) = X^4 + (b-2)X^3 + (6 - 2b + 1)X^2 + (b - 12)X + 6$$

donc, en identifiant coefficient par coefficient, il vient :

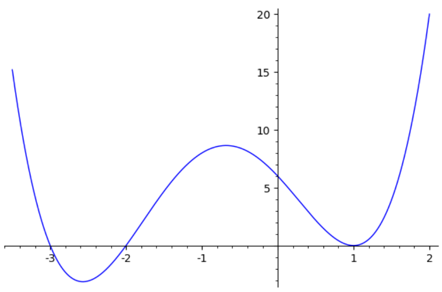
$$P(X) = (X^2 - 2X + 1)(X^2 + bX + 6) \iff \begin{cases} b - 2 = 3 \\ -2b + 7 = -3 \\ b - 12 = -7 \end{cases} \iff b = 5.$$

Cela démontre que $P(X) = (X+1)^2 \, (X^2 + 5X + 6)$.

4. On n'a plus qu'à résoudre l'équation $x^2 + 5x + 6 = 0$. Le discriminant est $25 - 4 \cdot 6 = 1 = 1^2$ donc les racines de $X^2 + 5X + 6$ sont

$$\frac{-5+1}{2} = -2 \quad \text{et} \quad \frac{-5-1}{2} = -3.$$

Ainsi, les racines de P sont 1 (avec multiplicité 2), -2 et -3.



Pour l'anecdote, on a représenté ci-dessus le graphe de la fonction polynomiale associée à P, c'est-à-dire la fonction $\tilde{P} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 7x + 6$. $\square$