**Université Claude Bernard Lyon 1** — **Semestre de printemps 2023–2024**

L1 mathématiques-informatique — UE : Algèbre 1 B (MAT1070L)

---

Contrôle du 19 mars 2024

# Sujet A

Durée : 1 heure

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

---

Attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct.

*Important : indiquer la lettre du sujet (A ou B) sur la copie*

**Exercice 1.** Vrai ou faux ? On justifiera chaque réponse.

a) Pour $a$ et $b$ complexes quelconques, la partie réelle de $a + b\,\mathrm{i}$ est $a$.

b) Le quotient $\dfrac{z}{z'}$ de deux complexes non nuls $z$ et $z'$ admet pour argument la différence des arguments.

*Solution.* a) Faux. Si $a$ n'est pas réel il est clair que ça ne peut pas être la partie réelle de $a + \mathrm{i}$. Si $a$ est réel mais que $b$ ne l'est pas, par exemple $b = 3 + \mathrm{i}$, alors $a + b\mathrm{i} = a - 1 + 3\mathrm{i}$ et la partie réelle de $a + b\,\mathrm{i}$ est $a - 1 \neq a$. De façon générale, $\mathrm{Re}(a + b\,\mathrm{i}) = \mathrm{Re}(a) - \mathrm{Im}(b)$, qui n'a aucune raison d'être égal à $a$.

b) Vrai. Soient $\theta$ et $\theta'$ des arguments de $z$ et $z'$, de sorte que $z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $z' = |z'|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$. Alors, comme l'exponentielle complexe transforme les sommes en produits (donc les différences en quotients),

$$\frac{z}{z'} = \frac{|z|}{|z'|}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}} = \frac{|z|}{|z'|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}.$$

C'est le produit d'un réel strictement positif et d'une exponentielle complexe, ce qui permet d'affirmer que $\theta - \theta'$ est un argument de $z/z'$. □

**Exercice 2.** On considère l'équation suivante, d'inconnue $z$ complexe :

$$\mathrm{i}\,z^2 + (1 - 2\,\mathrm{i})\,z - 6 + 6\,\mathrm{i} = 0.$$

a) Calculer le discriminant $\Delta$ de cette équation.

b) Calculer une racine carrée $\delta$ de $\Delta$.

c) Résoudre l'équation.

*Solution.* a) C'est un polynôme de degré deux avec $a = \mathrm{i}$, $b = 1 - 2\mathrm{i}$, $c = -6 + 6\,\mathrm{i}$. Le discriminant est

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1 - 2\,\mathrm{i})^2 - 4\mathrm{i}\,(-6 + 6\,\mathrm{i}) = 1 - 4 - 4\,\mathrm{i} + 24\,\mathrm{i} + 24 = 21 + 20\,\mathrm{i}.$$

b) On cherche $x$ et $y$ réels tels que $\delta = x + y\,\mathrm{i}$ soit une racine carrée de $\Delta$. On a vu une infinité plus une fois la méthode :

$$\begin{aligned}
\delta^2 = \Delta &\iff (x+y\,\mathrm{i})^2 = \Delta \text{ et } |x+y\,\mathrm{i}|^2 = |\Delta| \\
&\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 21 \\ 2xy = 20 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{21^2+20^2} = \sqrt{841} = 29 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 = \dfrac{21+29}{2} = 5^2 \\ y^2 = \dfrac{-21+29}{2} = 2^2 \\ xy = 10 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 5 \text{ et } y = 2 \\ \text{ou} \\ x = -5 \text{ et } y = -2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, les racines de $\Delta$ sont $5 + 2\,\mathrm{i}$ et $-5 - 2\,\mathrm{i}$.

c) On sait que les solutions de $az^2 + bz + c = 0$ sont $(-b \pm \delta)/(2a)$, où $\delta$ est une racine carrée de $\Delta = b^2 - 4ac$. On trouve ici :

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{-1+2\,\mathrm{i}+5+2\,\mathrm{i}}{2\,\mathrm{i}} = \frac{4+4\,\mathrm{i}}{2\,\mathrm{i}} = -2\,\mathrm{i}+2 \\
\text{et } z_2 &= \frac{-1+2\,\mathrm{i}-5-2\,\mathrm{i}}{2\,\mathrm{i}} = \frac{-6}{2\,\mathrm{i}} = 3\,\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

□

**Exercice 3.** Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

a) $z_1 = -5 - 5\,\mathrm{i}$, b) $z_2 = 3\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi/5}$, c) $z_3 = \dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}$.

*Solution.* On suppose connus $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$ ainsi que $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, la parité du cosinus et l'imparité du sinus.

a) $|z_1| = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{2}$ donc $z_1 = 5\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\right) = \boxed{5\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}}$.

b) $|z_2| = 3\,|\mathrm{i}|\,\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}\right| = 3$ et $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ d'où $z_2 = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}} = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}\right)} = \boxed{3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{10}}}$.

c) $z_3 = \dfrac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})(-1-\mathrm{i}\sqrt{3})}{(-1)^2+3} = \dfrac{-2\sqrt{3}-2\,\mathrm{i}}{4} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}}$.

Variante : $z_3 = \dfrac{\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}}{\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\cos\frac{\pi}{6} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}}{-\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}} = \dfrac{\cos -\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin -\frac{\pi}{6}}{\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}} = \boxed{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}}$

(c'est bien la même chose car la différence est $\frac{7\pi}{6} - \left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{12\pi}{6} = 2\pi$ !). □

**Exercice 4.** Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. On s'intéresse à l'équation d'inconnue $z$ complexe :

$$z^n = \mathrm{i}\,\overline{z}.$$

a) Montrer que si $z$ est une solution, alors $|z| = 0$ ou $|z| = 1$.

b) Soit $z$ une solution non nulle de l'équation. Quelles sont les valeurs possibles de l'argument de $z$ ?

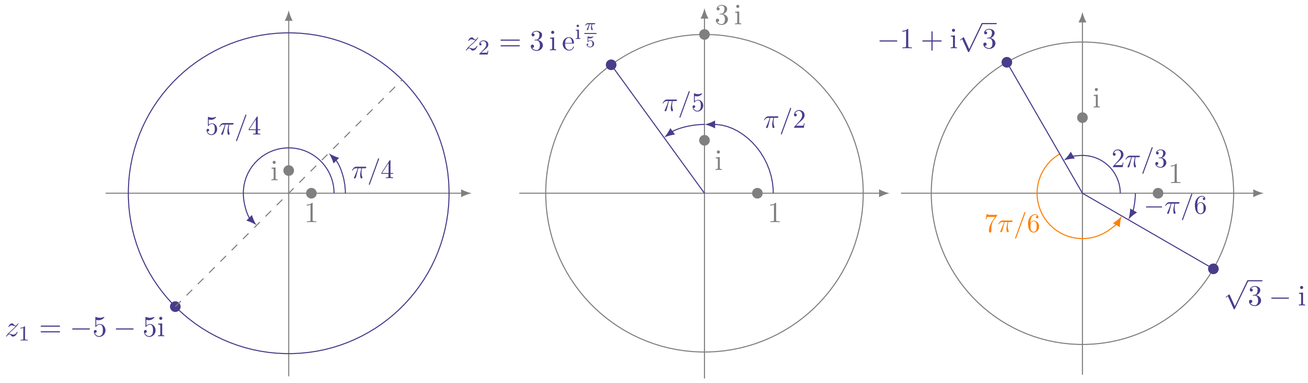


FIGURE 1 – Modules et arguments de l'exercice 3

c) Donner enfin toutes les solutions de l'équation. Les représenter sur une figure dans le cas où $n = 3$.

*Solution.* a) Supposons que $z$ soit une solution. Alors $|z^n| = |\overline{z}|$. Or $|z^n| = |z|^n$ et $|\mathrm{i}\,\overline{z}| = |\mathrm{i}| \cdot |\overline{z}| = |z|$. Il vient $0 = |z|^n - |z| = |z|\big(|z|^{n-1} - 1\big)$ d'où $|z| = 0$ ou $|z|^{n-1} = 1$, c'est-à-dire (puisque $n - 1 \geq 1$), $|z| = 0$ ou $|z| = 1$.

b) Puisque $z$ n'est pas nul et qu'il est solution, on a $|z| = 1$ donc $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$ convenable. D'autre part, $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$. L'équation s'écrit

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2} - \mathrm{i}\theta}$$

donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n\theta = \frac{\pi}{2} - \theta + 2k\pi, \quad \text{c'est-à-dire } \theta = \frac{\pi}{2(n+1)} + \frac{2k\pi}{n+1}.$$

En notant $\theta_k = \frac{\pi}{2(n+1)} + \frac{2k\pi}{n+1}$, on constate que $\theta_{k+n+1} = \theta_k + 2\pi$ donc $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{k+n+1}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}$. Par suite, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_r}$ où $r$ est le reste de la division euclidienne de $k$ par $n+1$. Autrement dit, les valeurs possibles de l'argument d'une solution sont $\frac{\pi}{2(n+1)} + \frac{2k\pi}{n+1}$ à un multiple de $2\pi$ près.

c) On vient de montrer que les solutions éventuelles sont $0$ (si $|z| = 0$) et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2(n+1)} + \frac{2k\pi}{n+1}\right)}$ pour $k \in \{0, \dots, n\}$. On vérifie qu'elles conviennent : en effet, $0^n = 0 = \mathrm{i} \cdot \overline{0}$ et, pour $k \in \{0, \dots, n\}$ et $z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2(n+1)} + \frac{2k\pi}{n+1}\right)}$, on a (vu que $\frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1} = 1$) :

□

| Table des carrés des entiers de 11 à 25 | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 121 | 144 | 169 | 196 | 225 | 256 | 289 | 324 | 361 | 400 | 441 | 484 | 529 | 576 | 625 |

| Table des carrés des entiers de 26 à 40 | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 676 | 729 | 784 | 841 | 900 | 961 | 1024 | 1089 | 1156 | 1225 | 1296 | 1369 | 1444 | 1521 | 1600 |

**Université Claude Bernard Lyon 1** | **Semestre de printemps 2023–2024**
L1 mathématiques-informatique | UE : Algèbre 1 B (MAT1070L)

---

Contrôle du 19 mars 2024

# Sujet B

Durée : 1 heure

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

---

Attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct.

*Important : indiquer la lettre du sujet (A ou B) sur la copie*

**Exercice 1.** Vrai ou faux ? On justifiera chaque réponse.

a) Le produit $zz'$ de deux complexes non nuls $z$ et $z'$ admet pour argument la somme des arguments.

b) Pour $a$ et $b$ complexes quelconques, la partie imaginaire de $a + b\,\mathrm{i}$ est $b$.

*Solution.* a) Vrai. Soient $\theta$ et $\theta'$ des arguments de $z$ et $z'$, de sorte que $z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $z' = |z'|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$. Alors, comme l'exponentielle complexe transforme les sommes en produits,

$$zz' = |z||z'|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = |z||z'|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}.$$

C'est le produit d'un réel strictement positif et d'une exponentielle complexe, ce qui permet d'affirmer que $\theta - \theta'$ est un argument de $z/z'$.

b) Faux. Si $b$ n'est pas réel il est clair que ça ne peut pas être la partie réelle de $a + \mathrm{i}$. De plus, même si $b$ est réel mais que $a$ ne l'est pas, par exemple $a = 3 + \mathrm{i}$, alors $a + b\mathrm{i} = 3 + (b + 1)\mathrm{i}$ et la partie réelle de $a + b\,\mathrm{i}$ est $b + 1 \neq b$. De façon générale, $\mathrm{Im}(a + b\,\mathrm{i}) = \mathrm{Im}(a) + \mathrrm{Re}(b)$, qui n'a aucune raison d'être égal à $b$. □

**Exercice 2.** On considère l'équation suivante, d'inconnue $z$ complexe :

$$\mathrm{i}\,z^2 + (-1 - 3\mathrm{i})\,z + 9 + 6\,\mathrm{i} = 0.$$

a) Calculer le discriminant $\Delta$ de cette équation.

b) Calculer une racine carrée $\delta$ de $\Delta$.

c) Résoudre l'équation.

*Solution.* a) On reconnaît un polynôme de degré deux avec $a = \mathrm{i}$, $b = 1 - 2\mathrm{i}$, $c = -6 + 6\mathrm{i}$. Le discriminant est

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1 - 2\,\mathrm{i})^2 - 4\mathrm{i}\,(-6 + 6\,\mathrm{i}) = 1 - 4 - 4\,\mathrm{i} + 24\,\mathrm{i} + 24 = 21 + 20\,\mathrm{i}.$$

b) On cherche $x$ et $y$ réels tels que $\delta = x + y\,\mathrm{i}$ soit une racine carrée de $\Delta$. On a vu une infinité plus une fois la méthode :

$$\begin{aligned}
\delta^2 = \Delta &\iff (x+y\,\mathrm{i})^2 = \Delta \text{ et } |x+y\,\mathrm{i}|^2 = |\Delta| \\
&\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 21 \\ 2xy = 20 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{21^2 + 20^2} = \sqrt{841} = 29 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 = \dfrac{21+29}{2} = 5^2 \\ y^2 = \dfrac{-21+29}{2} = 2^2 \\ xy = 10 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 5 \text{ et } y = 2 \\ \text{ou} \\ x = -5 \text{ et } y = -2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, les racines de $\Delta$ sont $5 + 2\,\mathrm{i}$ et $-5 - 2\,\mathrm{i}$.

c) On sait que les solutions de $az^2 + bz + c = 0$ sont $(-b \pm \delta)/(2a)$, où $\delta$ est une racine carrée de $\Delta = b^2 - 4ac$. On trouve ici :

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{-1 + 2\,\mathrm{i} + 5 + 2\,\mathrm{i}}{2\,\mathrm{i}} = \frac{4 + 4\,\mathrm{i}}{2\,\mathrm{i}} = -2\,\mathrm{i} + 2 \\
\text{et } z_2 &= \frac{-1 + 2\,\mathrm{i} - 5 - 2\,\mathrm{i}}{2\,\mathrm{i}} = \frac{-6}{2\,\mathrm{i}} = 3\,\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

□

**Exercice 3.** Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

a) $z_1 = -4 + 4\,\mathrm{i}$, b) $z_2 = -2\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi/7}$, c) $z_3 = \dfrac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{-\sqrt{3} + \mathrm{i}}$.

*Solution.* On suppose connus $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$, la parité du cosinus et l'imparité du sinus.

a) $|z_1| = \sqrt{3 + 1^2} = 2$ donc $z_1 = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}\right) = \boxed{2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}}$.

b) $|z_2| = 2$ et $z_2 = 2 \cdot (-\mathrm{i}) = \boxed{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}$.

c) $z_3 = \dfrac{(\sqrt{3} + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})}{1 + 3} = \dfrac{2\sqrt{3} - 2\,\mathrm{i}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i} = \boxed{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$. □

**Exercice 4.** Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. On s'intéresse à l'équation d'inconnue $z$ complexe :

$$z^n = -\mathrm{i}\,\overline{z}.$$

a) Montrer que si $z$ est une solution, alors $|z| = 0$ ou $|z| = 1$.

b) Soit $z$ une solution non nulle de l'équation. Quelles sont les valeurs possibles de l'argument de $z$ ?

c) Donner enfin toutes les solutions de l'équation. Les représenter sur une figure dans le cas où $n = 3$.

*Solution.* a) Supposons que $z$ soit une solution. Alors $|z^n| = |\overline{z}|$. Or $|z^n| = |z|^n$ et $|\mathrm{i}\,\overline{z}| = |\mathrm{i}| \cdot |\overline{z}| = |z|$. Il vient $0 = |z|^n - |z| = |z|\big(|z|^{n-1} - 1\big)$ d'où $|z| = 0$ ou $|z|^{n-1} = 1$, c'est-à-dire (puisque $n - 1 \geq 1$), $|z| = 0$ ou $|z| = 1$.

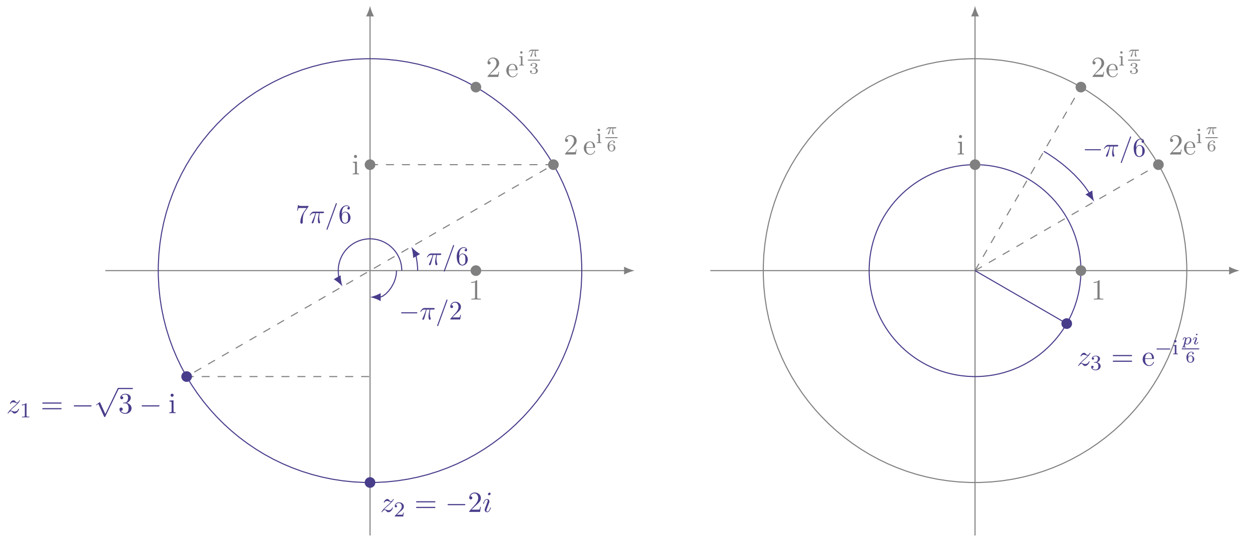


FIGURE 2 – Modules et arguments de l'exercice 3

b) Puisque $z$ n'est pas nul et qu'il est solution, on a $|z| = 1$ donc $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$ convenable. D'autre part, $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$. L'équation s'écrit

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2} - \mathrm{i}\theta}$$

donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n\theta = \frac{\pi}{2} - \theta + 2k\pi, \quad \text{c'est-à-dire } \theta = \frac{\pi}{2(n+1)} + \frac{2k\pi}{n+1}.$$

En notant $\theta_k = \frac{\pi}{2(n+1)} + \frac{2k\pi}{n+1}$, on constate que $\theta_{k+n+1} = \theta_k + 2\pi$ donc $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{k+n+1}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}$. Par suite, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_r}$ où $r$ est le reste de la division euclidienne de $k$ par $n+1$. Autrement dit, les valeurs possibles de l'argument d'une solution sont $\frac{\pi}{2(n+1)} + \frac{2k\pi}{n+1}$ à un multiple de $2\pi$ près.

c) On vient de montrer que les solutions éventuelles sont $0$ (si $|z| = 0$) et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2(n+1)} + \frac{2k\pi}{n+1}\right)}$ pour $k \in \{0, \ldots, n\}$. On vérifie qu'elles conviennent : en effet, $0^n = 0 = \mathrm{i} \cdot \overline{0}$ et, pour $k \in \{0, \ldots, n\}$ et $z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2(n+1)} + \frac{2k\pi}{n+1}\right)}$, on a (vu que $\frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1} = 1$) :

$\square$

| Table des carrés des entiers de 11 à 25 | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 121 | 144 | 169 | 196 | 225 | 256 | 289 | 324 | 361 | 400 | 441 | 484 | 529 | 576 | 625 |

| Table des carrés des entiers de 26 à 40 | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 676 | 729 | 784 | 841 | 900 | 961 | 1024 | 1089 | 1156 | 1225 | 1296 | 1369 | 1444 | 1521 | 1600 |