**Université Claude Bernard Lyon 1** | **Semestre de printemps 2023–2024**

L1 mathématiques-informatique | UE : Algèbre 1 B (MAT1070L)

---

Contrôle du 13 février 2023

# Sujet A

Durée : 1 heure

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

---

Attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct.

*Important : indiquer la lettre du sujet (A ou B) sur la copie*

**Exercice 1.** Vrai ou faux ? On justifiera chaque réponse.

a) La partie imaginaire de $7 - 5\,\mathrm{i}$ est $-5\,\mathrm{i}$.

b) Si $a$ et $b$ sont des nombres complexes quelconques, la partie réelle de $a + b\,\mathrm{i}$ est $a$.

c) Pour $z$ nombre complexe donné, si $|z| = 0$ alors $z = 0$.

*Solution.* a) Faux : la partie imaginaire d'un nombre complexe est un réel, celle de $7 - 5\,\mathrm{i}$ est $-5$.

b) Faux, ce n'est en général vrai que si $a$ et $b$ sont tous deux réels. Par exemple,
- si $a = \mathrm{i}$ et $b = 12$, alors $a + b\,\mathrm{i} = 13\,\mathrm{i}$ et sa partie réelle est $0 \neq a$ ;
- si $a = 3$ et $b = \mathrm{i}$, alors $a + b\,\mathrm{i} = 2$ et sa partie réelle est $2 \neq a$. □

c) Vrai. Deux lignes de justification possibles :
- si $|z| = 0$ alors a fortiori $z\overline{z} = |z|^2 = 0$ ; or un produit est nul SSI un des facteurs est nul, donc $z = 0$ ou $\overline{z} = 0$, auquel cas $z = \overline{0} = 0$ aussi ;
- en notant $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$, si $|z| = 0$ alors a fortiori $|z|^2 = 0$ donc $x^2 + y^2 = 0$ ; or $x^2 \geq 0$ et $y^2 \geq 0$ donc $0 \leq y^2 \leq x^2 + y^2 \leq 0$ d'où $y^2 = 0$ et enfin $y = 0$ ; de même en permutant $x$ et $y$.

**Exercice 2.** Écrire les nombres complexes suivants sous la forme $a + b\,\mathrm{i}$, avec $a$ et $b$ réels.

a) $z_1 = 4 + 5\,\mathrm{i} - (-5 + 3\,\mathrm{i})$, b) $z_2 = (-3 - 7\,\mathrm{i})(1 - 2\,\mathrm{i})$, c) $z_3 = \dfrac{1 - \mathrm{i}}{3 + \mathrm{i}}$.

*Solution.* a) $z_1 = 4 + 5\,\mathrm{i} - (-5 + 3\,\mathrm{i}) = 9 + 2\,\mathrm{i}$ ;

b) $z_2 = (-3 - 7\,\mathrm{i})(1 - 2\,\mathrm{i}) = -3 - 14 + (6 - 7)\mathrm{i} = -17 - \mathrm{i}$ ;

c) $z_3 = \dfrac{1 - \mathrm{i}}{3 + \mathrm{i}} = \dfrac{(1 - \mathrm{i})(3 - \mathrm{i})}{3^2 + 1} = \dfrac{3 - 1 + (-1 - 3)\mathrm{i}}{10} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}\mathrm{i}$. □

**Exercice 3.** Calculer le conjugué des nombres complexes suivants.

a) $z_4 = 6 + 7\,\mathrm{i}$ ;

b) $z_5 = 3$ ;

c) $z_6 = -2\,\mathrm{i}$.

*Solution.*

a) $\overline{z_4} = 6 - 7\,\mathrm{i}$ ; b) $\overline{z_5} = 3$ ; c) $\overline{z_6} = 2\,\mathrm{i}$. □

**Exercice 4.** On souhaite calculer les racines carrées de $A = -16 - 30\,\mathrm{i}$.

On fixe $z$ dans $\mathbb{C}$, on note $x$ sa partie réelle et $y$ sa partie imaginaire.

a) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $z^2$ en fonction de $x$ et $y$.

b) Montrer que l'égalité $z^2 = A$ est équivalente au système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -16 \\ xy = -15. \end{cases}$$

c) Montrer que si $z^2 = A$, alors $x^2 + y^2 = 34$.

d) Résoudre le système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -16 \\ x^2 + y^2 = 34. \end{cases}$$

e) Écrire enfin les racines carrées de $A$.

*Solution.* a) On a :

$$z^2 = (x + y\,\mathrm{i})^2 = x^2 - y^2 + 2xy\,\mathrm{i}$$

donc $\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2$ et $\mathrm{Im}(z^2) = 2xy$.

b) On a, puisque deux complexes sont égaux SSI leurs parties réelles et leurs parties imaginaires sont égales :

$$z^2 = A \iff x^2 - y^2 + 2xy\,\mathrm{i} = -16 - 30\,\mathrm{i} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -16 \\ 2xy = -30 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -16 \\ xy = -15. \end{cases}$$

c) Si $z^2 = A$, alors $|z^2| = |A|$. Or $|z^2| = |z|^2 = x^2 + y^2$ et

$$|A| = \sqrt{16^2 + 30^2} = \sqrt{2^2 \times 8^2 + 2^2 \times 15^2} = 2\sqrt{64 + 225} = 2\sqrt{289} = 2 \times 17 = 34.$$

D'où $x^2 + y^2 = 34$.

d) Si $(x, y)$ est solution, alors la somme des deux équations donne

$$2x^2 = -16 + 34 = 18 \quad \text{d'où } x^2 = 9, \quad \text{c'est-à-dire } x = \pm 3.$$

La différence des deux équations donne

$$2y^2 = 16 + 34 = 18 \quad \text{d'où } y^2 = 25, \quad \text{c'est-à-dire } y = \pm 5.$$

On a quatre solutions potentielles : $(3, 5)$, $(3, -5)$, $(-3, 5)$, $(-3, -5)$. On vérifie qu'elles conviennent.

e) Parmi les quatre solutions trouvées ci-dessus, seules la deuxième et la troisième satisfont à l'équation supplémentaire $xy = -15$.

Ainsi, les racines carrées de $A$ sont donc $3 - 5\,\mathrm{i}$ et $-3 + 5\,\mathrm{i}$. □

| Table des carrés des entiers de 11 à 25 | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 121 | 144 | 169 | 196 | 225 | 256 | 289 | 324 | 361 | 400 | 441 | 484 | 529 | 576 | 625 |

| Table des carrés des entiers de 26 à 40 | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 676 | 729 | 784 | 841 | 900 | 961 | 1024 | 1089 | 1156 | 1225 | 1296 | 1369 | 1444 | 1521 | 1600 |

**Université Claude Bernard Lyon 1** | **Semestre de printemps 2023–2024**

L1 mathématiques-informatique | UE : Algèbre 1 B (MAT1070L)

---

Contrôle du 13 février 2023

# Sujet B

Durée : 1 heure

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

---

Attention à rédiger correctement. Toute rédaction incomplète ou imprécise sera sanctionnée même si le raisonnement est correct.

*Important : indiquer la lettre du sujet (A ou B) sur la copie*

**Exercice 1.** Vrai ou faux ? On justifiera chaque réponse.

a) Pour $z$ nombre complexe donné, si $|z| = 0$ alors $z = 0$.

b) La partie imaginaire de $4 - 3\,\mathrm{i}$ est $-3\,\mathrm{i}$.

c) Si $a$ et $b$ sont des nombres complexes quelconques, la partie imaginaire de $a + b\,\mathrm{i}$ est $b$.

*Solution.* a) Vrai. Deux lignes de justification possibles :

— si $|z| = 0$ alors a fortiori $z\overline{z} = |z|^2 = 0$ ; or un produit est nul SSI un des facteurs est nul, donc $z = 0$ ou $\overline{z} = 0$, auquel cas $z = \overline{0} = 0$ aussi ;

— en notant $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$, si $|z| = 0$ alors a fortiori $|z|^2 = 0$ donc $x^2 + y^2 = 0$ ; or $x^2 \geq 0$ et $y^2 \geq 0$ donc $0 \leq y^2 \leq x^2 + y^2 \leq 0$ d'où $y^2 = 0$ et enfin $y = 0$ ; de même en permutant $x$ et $y$.

b) Faux : la partie imaginaire d'un nombre complexe est un réel, celle de $4 - 3\,\mathrm{i}$ est $-3$.

c) Faux, ce n'est en général vrai que si $a$ et $b$ sont tous deux réels. Par exemple,

— si $a = \mathrm{i}$ et $b = 12$, alors $a + b\,\mathrm{i} = 13\,\mathrm{i}$ et sa partie imaginaire est $13 \neq b$ ;

— si $a = 3$ et $b = \mathrm{i}$, alors $a + b\,\mathrm{i} = 2$ et sa partie réelle est $0 \neq b$. □

**Exercice 2.** Écrire les nombres complexes suivants sous la forme $a + b\,\mathrm{i}$, avec $a$ et $b$ réels.

a) $z_1 = 5 - 4\,\mathrm{i} - (-5 + 6\,\mathrm{i})$, b) $z_2 = (-4 + 6\,\mathrm{i})(2 - \mathrm{i})$, c) $z_3 = \dfrac{2 - \mathrm{i}}{1 + 3\,\mathrm{i}}$.

*Solution.* a) $z_1 = 5 - 4\,\mathrm{i} - (-5 + 6\,\mathrm{i}) = 10 - 10\,\mathrm{i}$ ;

b) $z_2 = (-4 + 6\,\mathrm{i})(2 - \mathrm{i}) = -8 + 6 + (4 + 12)\,\mathrm{i} = -2 + 16\,\mathrm{i}$ ;

c) $z_3 = \dfrac{2 - \mathrm{i}}{1 + 3\,\mathrm{i}} = \dfrac{(2 - \mathrm{i})(1 - 3\,\mathrm{i})}{1^2 + 3^2} = \dfrac{2 - 3 + (-6 - 1)\mathrm{i}}{10} = -\dfrac{1}{10} - \dfrac{7}{10}\mathrm{i}$. □

**Exercice 3.** Calculer le conjugué des nombres complexes suivants.

a) $z_4 = -5 + 8\,\mathrm{i}$ ;

b) $z_5 = -13$ ;

c) $z_6 = 3\,\mathrm{i}$.

*Solution.*

a) $\overline{z_4} = -5 - 8\,\mathrm{i}$ ; b) $\overline{z_5} = -13$ ; c) $\overline{z_6} = -3\,\mathrm{i}$. □

**Exercice 4.** On souhaite calculer les racines carrées de $A = 16 - 30\,\mathrm{i}$.

On fixe $z$ dans $\mathbb{C}$, on note $x$ sa partie réelle et $y$ sa partie imaginaire.

a) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $z^2$ en fonction de $x$ et $y$.

b) Montrer que l'égalité $z^2 = A$ est équivalente au système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16 \\ xy = -15. \end{cases}$$

c) Montrer que si $z^2 = A$, alors $x^2 + y^2 = 34$.

d) Résoudre le système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16 \\ x^2 + y^2 = 34. \end{cases}$$

e) Écrire enfin les racines carrées de $A$.

*Solution.* a) On a :

$$z^2 = (x + y\,\mathrm{i})^2 = x^2 - y^2 + 2xy\,\mathrm{i}$$

donc $\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2$ et $\mathrm{Im}(z^2) = 2xy$.

b) On a, puisque deux complexes sont égaux SSI leurs parties réelles et leurs parties imaginaires sont égales :

$$z^2 = A \iff x^2 - y^2 + 2xy\,\mathrm{i} = 16 - 30\,\mathrm{i} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 16 \\ 2xy = -30 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 16 \\ xy = -15. \end{cases}$$

c) Si $z^2 = A$, alors $|z^2| = |A|$. Or $|z^2| = |z|^2 = x^2 + y^2$ et

$$|A| = \sqrt{16^2 + 30^2} = \sqrt{2^2 \times 8^2 + 2^2 \times 15^2} = 2\sqrt{64 + 225} = 2\sqrt{289} = 2 \times 17 = 34.$$

D'où $x^2 + y^2 = 34$.

d) Si $(x, y)$ est solution, alors la somme des deux équations donne

$$2x^2 = 16 + 34 = 50 \quad \text{d'où } x^2 = 25, \quad \text{c'est-à-dire } x = \pm 5.$$

La différence des deux équations donne

$$2y^2 = -16 + 34 = 18 \quad \text{d'où } y^2 = 9, \quad \text{c'est-à-dire } y = \pm 3.$$

On a quatre solutions potentielles : $(5, 3)$, $(5, -3)$, $(-5, 3)$, $(-5, -3)$. On vérifie qu'elles conviennent.

e) Parmi les quatre solutions trouvées ci-dessus, seules la deuxième et la troisième satisfont à l'équation supplémentaire $xy = -15$.

Ainsi, les racines carrées de $A$ sont donc $5 - 3\,\mathrm{i}$ et $-5 + 3\,\mathrm{i}$. □

| Table des carrés des entiers de 11 à 25 | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 121 | 144 | 169 | 196 | 225 | 256 | 289 | 324 | 361 | 400 | 441 | 484 | 529 | 576 | 625 |

| Table des carrés des entiers de 26 à 40 | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 676 | 729 | 784 | 841 | 900 | 961 | 1024 | 1089 | 1156 | 1225 | 1296 | 1369 | 1444 | 1521 | 1600 |