Université Claude Bernard Lyon 1
L1 de mathématiques : Algèbre 1B
Année 2023–2024, printemps

Nombres complexes

I Introduction en forme de vade-mecum

Ce qu'il faut retenir dans une coquille de noix (≪ àspc ≫ signifie ≪ à savoir par cœur ≫).

- les règles de calculs sur les nombres complexes sont celles auxquelles on est habitué depuis toujours ; on a dans $\mathbb{C}$ les réels et un élément i dont le carré vaut -1 ;
- en pratique, un nombre complexe z possède deux représentations :
  - ≪ forme algébrique ≫ : $z = x + y\mathrm{i}$, où x et y sont deux réels bien définis ; cette écriture est adaptée aux opérations linéaires (addition, multiplication par un réel) ;
  - ≪ forme géométrique ≫ : $z = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, où $\rho \geqslant 0$ est unique et, si $z \neq 0$, θ est unique à 2π près ; cette écriture est adaptée aux produits, aux quotients, aux puissances ;
  - (àspc) l'unicité des écritures se traduit par les critères d'égalité suivants :
    - $x + y\mathrm{i} = x' + y'\mathrm{i}$ si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$;
    - (si $z \neq 0$) $\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \rho'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$ si et seulement si $\rho = \rho'$ et $\theta \equiv \theta'$ $[2\pi]$;
- on a $z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)\mathrm{i}$ et $\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)\mathrm{i}$ et $|z|^2 = z\,\overline{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$;
- (àspc) on appelle *argument* d'un complexe non nul z tout réel θ tel que $z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$; tous les arguments sont égaux à 2π près ; l'argument principal $\arg(z)$ est l'unique argument qui appartient à $]-\pi, \pi]$;
- mise en garde : la relation $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ est fausse en général ! (pourquoi ?) elle est cependant vraie à 2π près ;
- les racines n-ièmes se retrouvent facilement si on cherche les racines de $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ sous forme géométrique $\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$; les critères ci-dessus donnent $\rho^n = r$ et $n\theta \equiv \alpha$ $[2\pi]$, d'où l'on tire $\rho = r^{1/n}$ et $\theta = (\alpha + 2k\pi)/n$ pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$ convenable).

II Construction

1° Un rêve

a) Ce que l'on a...

Prenons quelques minutes pour réfléchir aux variations de sens du mot *nombre* et aux règles de calcul.

$\mathbb{N}^*$ **: entiers naturels non nuls** — Ça commence avec la comptine 1, 2, 3... et ça ne s'arrête jamais. L'opération ≪ passer au suivant ≫, c'est-à-dire transformer un entier m en $m+1$, peut être itérée. Si on la répète n fois, on obtient la somme $m+n$. Répéter m fois l'addition de n revient à ajouter le produit $m \times n$, plus souvent noté mn.

Les deux opérations *somme* et *produit* suivent des règles de calcul que l'on a intégrées depuis longtemps : pour tous m, n et p,

$$(m + n) + p = m + (n + p) \quad \text{et} \quad m + n = n + m, \tag{1}$$

qu'on appelle *associativité* et *commutativité* ; ces règles permettent de ne pas se préoccuper de l'ordre dans lequel on fait des sommes de plusieurs nombres car on trouvera toujours le même résultat.

La multiplication suit les mêmes règles :

$$(mn)p = m(np) \quad \text{et} \quad mn = nm. \tag{2}$$

De plus, on a une propriété utile de compatibilité entre les deux, appelée la *distributivité*[1] : pour tous m, n et p,

$$m(n + p) = mn + np \tag{3}$$

1. Certes, on ne la voit pas à l'école primaire... Elle n'en est pas moins vraie !

(c'est-à-dire, vu les priorités des opérations, $m(n+p) = (mn) + (np)$).

Le nombre 1 joue un rôle particulier dans le produit des entiers : on dit qu'il est *neutre* : pour tout m,

$$1 \times m = m = m \times 1. \tag{4}$$

$\mathbb{N}$ **: entiers naturels** — On ajoute un « nombre » 0 pour dénombrer les collections vides. Du point de vue opératoire, il est caractérisé par le fait d'être *neutre* pour l'addition et *absorbant* pour la multiplication : pour tout m on a :

$$m + 0 = m = 0 + m \quad \text{et} \quad m \times 0 = 0 = 0 \times m. \tag{5}$$

Sauriez-vous dire formellement ce qu'*est* un nombre naturel [2] ? Sans doute pas et ce n'est pas grave car vous savez les manipuler et ça ne vous inquiète pas de ne pas savoir.

$\mathbb{Z}$ **: entiers relatifs** — Rapidement, quand on sait faire des additions se pose le problème de faire des soustractions (« combien faut-il ajouter à 3 pour obtenir une somme égale à 7 ? »). On s'aperçoit vite que toutes les soustractions ne sont pas possibles dans $\mathbb{N}$. Autrement dit, étant donné m et n, l'équation

$$x + m = n$$

n'a une solution dans $\mathbb{N}$ que si $n \geqslant m$ – on la note $n - m$. On introduit alors les entiers négatifs : pour tout entier m, on introduit un nouveau « nombre » noté $-m$ qui est *le nombre qu'il faut ajouter à m pour trouver* 0 :

$$m + (-m) = 0 = (-m) + m. \tag{6}$$

Autrement dit un entier relatif m, c'est un entier naturel $|m|$ précédé d'un signe $\operatorname{sg}(m)$ qui est + ou − (souvent omis si c'est +). On étend les opérations de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}$: si m et n sont deux entiers relatifs, alors

$$m + n = \begin{cases} |m| + |n| & \text{si } m = |m| \text{ et } n = |n| \ ; \\ |m| - |n| & \text{si } m = |m| \text{ et } n = -|n| \text{ et } |m| \geqslant |n| \ ; \\ -\big(|n| - |m|\big) & \text{si } m = |m| \text{ et } n = -|n| \text{ et } |m| \leqslant |n| \ ; \\ -\big(|m| - |n|\big) & \text{si } m = -|m| \text{ et } n = |n| \text{ et } |m| \geqslant |n| \ ; \\ |n| - |m| & \text{si } m = -|m| \text{ et } n = |n| \text{ et } |m| \leqslant |n| \ ; \\ -\big(|m| + |n|\big) & \text{si } m = -|m| \text{ et } n = -|n| \ ; \end{cases}$$

$$mn = \begin{cases} |m| \times |n| & \text{si } \operatorname{sg}(m) = \operatorname{sg}(n) \ ; \\ -\big(|m| \times |n|\big) & \text{si } \operatorname{sg}(m) = -\operatorname{sg}(n) \end{cases}$$

Dit comme ça, ça semble bien compliqué à énoncer et passablement arbitraire, alors que c'est la seule façon de plonger $\mathbb{N}$ dans un ensemble où il y a une soustraction.

Grande satisfaction : les règles de calcul vues plus haut restent valables !

On sait alors résoudre toutes les équations $x + m = n$: si $n \geqslant m$ on a la solution $n - m$; si $n \leqslant m$ on a la solution $-(m - n)$.

Sauriez-vous dire formellement ce qu'*est* un nombre négatif [3] Peut-être pas (même si vous savez définir une température négative ou un compte en banque négatif) et ce n'est pas grave car vous savez les manipuler de façon efficace et ça ne vous inquiète pas de ne pas savoir.

$\mathbb{Q}$ **: nombres rationnels (fractions)** — De même que pour l'addition, savoir faire des multiplications conduit vite à des problèmes de division (« par combien dois-je multiplier 5 pour trouver 35 ? ») ; il y a aussi les problèmes de partage (« pour partager équitablement 120 écus entre 5 personnes, combien faut-il en donner à chacune ? »). On s'aperçoit vite que toutes les divisions

---

2. Scoop : c'est un ordinal que l'on ne peut pas mettre en bijection avec une partie propre.
3. Scoop : c'est une classe d'équivalence de couples $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pour la relation $(a, b) \sim (c, d)$ si $a + d = c + b$. ?

ne sont pas possibles, du moins elles font apparaître un reste. Autrement dit l'équation suivante n'a pas toujours de solutions dans $\mathbb{Z}$:

$$ax + b = c.$$

On introduit alors un nouvel ensemble de « nombres » dits *rationnels* constitué des symboles de la forme a/b où a et b sont deux entiers avec b non nul. Si a' et $b' \neq 0$ sont deux autres entiers, alors

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \iff ab' - ba' = 0.$$

On étend alors les opérations : si $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \ ;$$
$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Dit comme ça, ça semble un peu arbitraire, non ? Pourtant vous y êtes tellement habitués que votre surprise pourrait vous surprendre...

Grande satisfaction : les règles de calcul vues plus haut restent valables ! On en a une de plus : pour tout rationnel r, il existe un autre rationnel noté r^{-1} ou $1/r$ tel que

$$r \times \frac{1}{r} = 1 = \frac{1}{r} \times r. \tag{7}$$

On sait résoudre toutes les équations $ax + b = c$: l'unique solution est $(c - b)/a$ (si $a \neq 0$).

Sauriez-vous dire formellement ce qu'*est* une fraction [4] ? Peut-être pas et ce n'est pas grave car vous savez les manipuler de façon (assez) efficace et ça ne vous inquiète pas de ne pas savoir.

$\mathbb{R}$ **: nombres réels** — Le passage des rationnels aux réels n'est pas de même nature. Il ne s'agit pas d'ajouter des « nombres » pour pouvoir résoudre des équations mais de donner un sens à la limite des suites qui « doivent » en avoir une.

En gros, si on se donne un entier et une suite finie de décimales, par exemple 3 et $(1, 4, 1, 5, 9)$, on peut former le nombre rationnel 3,14159. L'introduction des réels donne un sens aux développements décimaux illimités quelconques.

Je n'essaie même pas de décrire la somme ou le produit de deux réels en termes de développement décimaux – d'ailleurs ce n'est pas comme cela qu'elles sont définies... Néanmoins, on a sur $\mathbb{R}$ deux opérations qui, grande satisfaction, suivent les règles de calcul vues plus haut !

Sauriez-vous dire formellement ce qu'*est* un réel ? Sans doute pas et ce n'est pas grave car vous savez les manipuler et ça ne vous inquiète pas de ne pas savoir.

$\mathbb{C}$ **: nombres complexes** — Ce n'est toujours pas suffisant : certaines équations très naturelles, comme l'équation $x^2 + 1 = 0$ et plus généralement les équations de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif, n'ont pas de solution réelle. C'est à ce problème que le chapitre doit remédier – et de quelle manière, voir le théorème de D'Alembert-Gauss III3°c).

Saurez-vous dire formellement ce qu'*est* un complexe ? Sans doute pas et ce n'est pas grave car vous saurez les manipuler et ça ne vous inquiètera pas longtemps de ne pas savoir.

b) Ce que l'on veut préserver : la structure de corps

On part de l'idée qu'un ensemble de « nombres », c'est un ensemble où l'on sait calculer. Plus précisément, on a deux opérations, la somme et le produit, et des règles de calcul usuelles. La définition ci-dessous donne un ensemble minimal de ces règles pour les réels, d'où l'on peut déduire toutes leurs propriétés algébriques. Il y a donc deux façons de les considérer : d'une part, constater que oui, ce sont des propriétés « évidentes » ; d'autre part, s'émerveiller que tout le reste découle de ces quelques règles naturelles.

4. Scoop : c'est une classe d'équivalence de couples $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ pour la relation $(a, b) \sim (c, d)$ si $ad = cb$.

Définition. On appelle *corps* un ensemble $\mathbb{K}$ muni de deux opérations, la somme $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $(a, b) \mapsto a + b$ et le produit $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $(a, b) \mapsto a \cdot b$ (noté aussi ab ou $a \times b$), tels que :

(i) la somme est *associative* : pour tous a, b, c de $\mathbb{K}$, on a : $(a + b) + c = a + (b + c)$;

(ii) la somme est *commutative* : pour tous a et b de $\mathbb{K}$, on a : $a + b = b + a$;

(iii) la somme admet un *neutre* : il existe un élément de $\mathbb{K}$ noté 0 tel que pour tout a dans $\mathbb{K}$, on a : $a + 0 = a = 0 + a$;

(iv) tout élément admet un *opposé* : pour tout a de $\mathbb{K}$, il existe un élément a' tel que $a+a' = 0 = a'+a$;

(v) le produit est *associatif* : pour tous a, b, c de $\mathbb{K}$, on a : $(ab)c = a(bc)$;

(vi) le produit est *commutatif* : pour tous a et b de $\mathbb{K}$, on a : $ab = ba$;

(vii) le produit admet un *neutre* : il existe un élément de $\mathbb{K}$ noté 1 tel que pour tout a dans $\mathbb{K}$, on a : $a \times 1 = a = 1 \times a$;

(viii) tout élément non nul admet un *inverse* : pour tout a de $\mathbb{K}$ différent de 0, il existe un élément a' tel que $aa' = 1 = a'a$;

(ix) le produit est *distributif* sur la somme : pour tous a, b, c de $\mathbb{K}$, on a[5] : $a(b + c) = ab + ac$ et $(a + b)c = ac + bc$;

(x) les neutre de la somme et du produit sont différents.

Remarque. Les neutres sont uniques : si 0 et $0'$ sont deux neutres, on a ; $0 + 0' = 0$ car $0'$ est neutre et $0 + 0' = 0$ car 0 est neutre, si bien que $0 = 0'$. Idem pour 1.
De même, l'opposé est unique : si un élément a possède deux opposés a' et a'', on a par associativité : $a' = a' + 0 = a' + (a + a'') = (a' + a) + a'' = 0 + a'' = a''$. On le note : $-a$.
Idem pour l'inverse ; on note a^{-1} ou $1/a$ l'inverse d'un élément non nul a.

Remarque. Si toutes les propriétés sont satisfaites sauf la propriété (viii), on dit que $\mathbb{K}$ est un *anneau*. Par exemple, $\mathbb{Z}$ muni des opérations habituelles est un anneau mais pas un corps (les éléments non nuls autres que -1 et 1 n'ont pas d'inverse dans $\mathbb{Z}$).

Voici une propriété si utile qu'on la prouve en détail et une définition indispensable aussi.

Lemme. *Dans un corps $\mathbb{K}$, un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul :*

$$\forall a, b \in \mathbb{K}, \quad ab = 0 \iff \big(a = 0 \text{ ou } b = 0\big).$$

Démonstration. Supposons d'abord que $b = 0$. On a : $a \times 0 = a \times (0 + 0) = a \times 0 + a \times 0$. En ajoutant aux deux membres l'opposé de $a \times 0$, on trouve : $0 = a \times 0$. On procède de même pour montrer que si $a = 0$, alors $ab = 0$, ou bien on utilise la commutativité. Réciproquement, supposons que $ab = 0$. Il s'agit de montrer que si $a \neq 0$, alors $b = 0$, ce qui équivaut à « $a = 0$ ou $b = 0$ ». De fait, si $a \neq 0$, il possède un inverse a^{-1} et il vient : $b = 1b = a^{-1}ab = a^{-1} \times 0 = 0$. □

Définition. Soit $\mathbb{K}$ un corps et a un élément de $\mathbb{K}$. On définit les *puissances* de a ainsi : $a^0 = 1$ (et ce, que a soit nul ou pas ; attention aux conventions différentes dans d'autres contextes) ; $a^1 = a$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $a^{n+1} = a^n a$.

c) Ce que l'on va faire

On va construire un ensemble de nombres qui contient les réels, noté $\mathbb{C}$ et appelé *corps des nombres complexes*, dans lequel toutes les équations de degré 2 ont une solution (III3°b)) et même toutes les équations polynomiales (III3°c)).

2° Construction formelle (hors programme)

On peut sauter cette partie qui démontre le théorème justifiant l'existence du corps des complexes.

5. Dans l'expression $ab + ac$, il faut comprendre $(ab) + (ac)$ selon la convention habituelle de priorité au produit.

a) Un ensemble et des opérations

Définition. Comme ensemble, on définit l'ensemble $\mathbb{C}$ des *nombres complexes* comme l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de réels. On définit deux opérations sur $\mathbb{C}$:

$$+ : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\times\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \big((a,b),(a',b')\big) & \longmapsto & (a+a', b+b') \end{array} \quad \text{et} \quad \cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\times\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \big((a,b),(a',b')\big) & \longmapsto & (aa'-bb', ab'+ba'). \end{array}$$

Lemme. *Muni de ces opérations, $\mathbb{C}$ est un corps.*

Démonstration. (i) Pour l'associativité de l'addition, étant donné $(a,b),(a',b'),(a'',b'')\in\mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} \big((a,b)+(a',b')\big)+(a'',b'') &= (a+a',b+b')+(a'',b'') = (a+a'+a'', b+b'+b'') \\ (a,b)+\big((a',b')+(a'',b'')\big) &= (a,b)+(a'+a'',b'+b'') = (a+a'+a'', b+b'+b''), \end{aligned}$$

d'où l'égalité.
(ii) Pour la commutativité, étant donné $(a,b),(a',b')\in\mathbb{C}$, on a :

$$(a,b)+(a',b') = (a+a',b+b') = (a'+a,b'+b) = (a',b')+(a,b).$$

(iii) Le neutre de l'addition est : $\mathbf{0}=(0,0)$ car pour $(a,b)\in\mathbb{C}$, $(a,b)+(0,0)=(a+0,b+0)=(a,b)$.
(iv) Pour tout $(a,b)\in\mathbb{C}$, on a : $(a,b)+(-a,-b)=\mathbf{0}$ donc (a,b) a pour opposé $-(a,b)=(-a,-b)$.
(v) Pour l'associativité du produit, étant donné $(a,b),(a',b'),(a'',b'')\in\mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} \big((a,b)(a',b')\big)(a'',b'') &= (aa'-bb',ab'+ba')(a'',b'') \\ &= (aa'a''-bb'a''-ab'b''-ba'b'', aa'b''-bb'b''+ab'a''+ba'a'') \\ (a,b)\big((a',b')(a'',b'')\big) &= (a,b)(a'a''-b'b'',a'b''+b'a'') \\ &= (aa'a''-ab'b''-ba'b''-bb'a'', aa'b''+ab'a''+ba'a''-bb'b'') \end{aligned}$$

et on vérifie l'égalité.
(vi) Pour la commutativité du produit, étant donné $(a,b),(a',b')\in\mathbb{C}$, on a :

$$(a,b)(a',b') = (aa'-bb',ab'+ba') \text{ et } (a',b')(a,b) = (a'a-b'b,a'b+b'a).$$

(vii) Le neutre de la multiplication est $\mathbf{1}=(1,0)$ car pour tout (a,b), on a : $(a,b)\cdot(1,0)=(a\times 1-b\times 0, a\times 0+b\times 1)=(a,b)$.
(viii) On cherche un inverse à $(a,b)\neq(0,0)$. Remarquons d'emblée que la condition « $a\neq 0$ ou $b\neq 0$ » est équivalente à $a^2+b^2\neq 0$ (pourquoi ?). Il s'agit de trouver (a',b') tel que :

$$\begin{cases} aa'-bb'=1 \\ ba'+ab'=0. \end{cases}$$

On résout sans peine ce système de deux équations à deux inconnues (a',b') : on multiplie la première égalité par a et la deuxième par b et on ajout, puis on multiplie la première par $-b$ et la deuxième par a et on ajoute : cela donne $a'=a/(a^2+b^2)$ et $b'=-b/(a^2+b^2)$. La distributivité est un exercice d'écriture fastidieux mais facile.
(ix) Pour la distributivité, étant donné $(a,b),(a',b'),(a'',b'')\in\mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} (a,b)\big((a',b')+(a'',b'')\big) &= (a,b)(a'+a'',b'+b'') \\ &= (aa'+aa''-bb'-bb'', ab'+ab''+ba'+ba'') \\ (a,b)(a',b')+(a,b)(a'',b'') &= (aa'-bb',ab'+ba')+(aa''-bb'',ab''+ba'') \\ &= (aa'-bb'+aa''-bb'', ab'+ba'+ab''+ba'') \end{aligned}$$

et on vérifie qu'il y a égalité.
(x) Il est clair que $(0,0)\neq(1,0)$ puisque $0\neq 1$ dans $\mathbb{R}$. $\square$

b) Simplification de l'écriture

Première étape. Considérons l'application suivante : $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $a \mapsto (a, 0)$. C'est une injection car si $(a, 0) = (a', 0)$, alors $a = a'$ et on vérifie que l'on a

$$\varphi(0) = \mathbf{0}, \quad \varphi(1) = \mathbf{1}, \quad \varphi(a + a') = \varphi(a) + \varphi(a'), \quad \varphi(aa') = \varphi(a)\varphi(a')$$

pour tous a et a' réels. On identifiera $\mathbb{R}$ et son image dans $\mathbb{C}$ par φ, ce qui conduit à la définition suivante.

Définition. Soit z un nombre complexe. On dit que z est *réel* s'il appartient à l'image de φ, c'est-à-dire s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $z = \varphi(a)$.

Exercice. Au passage, on dit que z est *imaginaire pur* s'il existe b réel tel que $z = (0, b)$. Montrer que tout complexe peut s'écrire de façon unique comme somme d'un réel et d'un imaginaire pur. (Sens ?)

NOTATION. Désormais, pour a réel, on notera par abus a le nombre complexe $\varphi(a) = (a, 0)$.
En particulier, on notera $0 = \mathbf{0}$ et $1 = \mathbf{1}$.
Enfin, on convient de noter i le nombre complexe : $\mathrm{i} = (0, 1)$.

Deuxième étape. On calcule :

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \times 0 - 1 \times 1, 1 \times 0 + 0 \times 1) = (-1, 0) = -\mathbf{1}.$$

c) Soient a et b réels. On a dans $\mathbb{C}$:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = \varphi(a) + \varphi(b)\mathrm{i} = a + b\mathrm{i}.$$

d) Pour résumer, voici ce qu'on appelle la *représentation algébrique* d'un complexe.

Proposition. *Soit z un nombre complexe. Il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que*

$$z = a + b\mathrm{i}.$$

Démonstration. En effet, un nombre complexe est, formellement, un couple (a, b) de réels et on a vu que $a + b\mathrm{i}$ est simplement une autre écriture pour (a, b). □

On peut récrire les opérations avec ces nouvelles notations.

Corollaire. *Soient z et z' des nombres complexes. Il existe d'uniques réels a, b, a', b' tels que $z = a+b\mathrm{i}$ et $z' = a' + b'\mathrm{i}$. Alors :*

(i) $z + z' = a + a' + (b + b')\mathrm{i}$;

(ii) $zz' = aa' - bb' + (ab' + ba')\mathrm{i}$;

(iii) *si z n'est pas nul, c'est-à-dire si a ou b n'est pas nul, alors :* $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} + \dfrac{-b}{a^2 + b^2}\mathrm{i}$.

3° Perte de l'ordre

a) Corps ordonnés

Chez les réels, la relation d'ordre $\leqslant$ est compatible avec certaines opérations algébrique. Plus précisément...

Définition. On appelle *corps ordonné* un corps $\mathbb{K}$ (avec ses opérations, ses neutres, etc.) muni d'une relation d'ordre $\leqslant$ telle que pour tous a, b, c de $\mathbb{K}$, on a :

(i) si $a \leqslant b$, alors $a + c \leqslant b + c$;

(ii) si $a \leqslant b$ et $c \geqslant 0$, alors $ac \leqslant bc$.

Les éléments *positifs* (resp. *négatifs*) sont les éléments a tels que $a \geqslant 0$ (resp. $a \leqslant 0$).

Lemme. *Soit $\mathbb{K}$ un corps ordonné. Alors, -1 est strictement négatif et tout carré est positif.*

Démonstration. Soit a un élément de $\mathbb{K}$. Si $a \leqslant 0$, on applique la règle (i) avec $b = 0$ et $c = -a$, on trouve : $0 \leqslant -a$; de même, si $a \geqslant 0$, il vient : $0 \geqslant -a$. Autrement dit, a est positif si et seulement si $-a$ est négatif.
Par la règle (ii) avec $b = 0$ et $c = a$, il vient, si $a \geqslant 0$: $a^2 \geqslant 0$. Mais si $a \leqslant 0$, on a : $-a \geqslant 0$ et $a^2 = (-a)^2 = 0$. Ainsi, un carré est positif. En particulier, $1 = 1^2$ est positif, d'où -1 est négatif. □

b) Le corps des complexes ne peut pas être ordonné

Corollaire. *Il n'existe pas d'ordre sur $\mathbb{C}$ qui fasse de $\mathbb{C}$ un corps ordonné.*

Démonstration. En effet, -1 est un carré dans $\mathbb{C}$ – c'est le carré de i, par construction. S'il y avait un ordre sur $\mathbb{C}$ compatible aux opérations, -1 serait strictement négatif, comme dans n'importe quel corps, et positif en tant que carré. C'est absurbe. □

4° Présentation pragmatique

Dans le paragraphe 2°, on a démontré le théorème suivant.

Théorème. *Il existe un corps noté $\mathbb{C}$ et appelé* corps des complexes *contenant $\mathbb{R}$ et un élément noté* i *tel que*

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

Plus précisément, tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit de façon unique $a + b\mathrm{i}$ avec a et b réels, et les opérations sont définies ainsi :

- *pour a, b, a', b' réels, $z = a + b\mathrm{i}$ et $z' = a' + b'\mathrm{i}$,*
$$\begin{aligned} z + z' &= a + a' + (b + b')\mathrm{i}\ ; \\ zz' &= aa' - bb' + (ab' + ba')\mathrm{i}\ ; \end{aligned}$$
- *le neutre de l'addition est $0 = 0 + 0\mathrm{i}$;*
- *l'opposé d'un complexe $a + b\mathrm{i}$ est $-a + (-b)\mathrm{i}$;*
- *le neutre de la multiplication est $1 = 1 + 0\mathrm{i}$;*
- *l'inverse d'un complexe $a + b\mathrm{i}$ non nul (i.e. tel que $a^2 + b^2 > 0$) est*
$$\frac{1}{a + b\mathrm{i}} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}\mathrm{i}.$$

III Propriétés algébriques

1° Parties réelle et imaginaire, conjugaison

Définition. Soit z un nombre complexe. On a vu qu'il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + b\mathrm{i}$. On appelle *partie réelle* de z le réel a et *partie imaginaire* de z le réel b.
On appelle *conjugué* de z et on note $\overline{z}$ le nombre complexe : $\overline{z} = a - b\mathrm{i}$.

Mise en garde. *Attention, la partie imaginaire de $a + b\mathrm{i}$ est bien le réel b et pas $b\mathrm{i}$.*

Remarque (à savoir par cœur). Autrement dit, pour tout complexe z, on a :

$$z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)\mathrm{i} \quad \text{et} \quad \overline{z} = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)\mathrm{i}.$$

On en déduit par somme et différence :

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}.$$

On énonce une évidence qui traduit le fait que l'écriture.

Lemme. *Deux complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires sont égales :*

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad z = z' \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z'). \end{cases}$$

Exercice. Soit z un complexe. Montrer que z est réel si et seulement si $z = \mathrm{Re}(z)$ si et seulement si $z = \overline{z}$.

Lemme. *La conjugaison préserve somme et produit :*

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}, \text{ et } \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}.$$

La conjugaison est une involution :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \ \overline{\overline{z}} = z.$$

2° Module

Lemme. *Soit z un nombre complexe. Alors $z\overline{z}$ est un réel, il vaut : $z\overline{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$.*

Bien qu'on ne sache pas définir $\sqrt{z}$ pour un nombre complexe s'il n'est pas un nombre réel positif (et on ne saura toujours pas le faire à la fin du chapitre), le lemme donne un sens à la définition suivante.

Définition. Soit z un nombre complexe. On appelle *module* de z et on note $|z|$ le nombre réel : $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.

Remarque. Pour z réel, le module de z (vu comme nombre complexe) coïncide avec la valeur absolue de z (vu comme nombre réel). Pas de conflit de notation.

Proposition. *Soient z et z' deux entiers et k un entier relatif. On a :*

(i) $|z| \geqslant 0$ *et* $\big(|z| = 0$ *si et seulement si* $z = 0\big)$ *;*

(ii) $|z| = |\overline{z}|$ *;*

(iii) $|zz'| = |z|\,|z'|$ *;*

(iv) *si* $z \neq 0$, *alors* $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ *;*

(v) *si* $k \geqslant 0$ *ou si* $z \neq 0$, *alors :* $|z^k| = |z|^k$.

Démonstration. (i) Dans $\mathbb{R}$, un carré est positif ou nul, *a fortiori* une somme de deux carrés l'est aussi. Mais elle ne peut être nulle que si les deux carrés sont nuls, ce qui entraîne la propriété.
(ii) On a : $|\overline{z}| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + (-\mathrm{Im}(z))^2} = |z|$.
(iii) On pose $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$, idem pour z', et on calcule :

$$|zz'|^2 = \left|aa' - bb' + (ab' + ba')\mathrm{i}\right|^2 = (aa' - bb')^2 + (ab' + ba')^2 \text{ et } \big(|z|\,|z'|\big)^2 = (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2),$$

deux expressions que l'on identifie en les développant. Comme $|zz'|$ et $|z|\,|z'|$ sont deux réels positifs qui ont le même carré, ils sont égaux.
(iv) Pour $z \neq 0$, on prend $z' = 1/z$. Il vient : $|z|\,|z'| = |zz'| = |1| = 1$ donc : $|1/z| = 1/|z|$.
(v) On suppose d'abord $k \in \mathbb{N}$ et on procède par récurrence sur k. Pour $k = 0$, l'égalité est vraie car conventionnellement, chaque membre vaut 1. Pour $k = 1$, l'égalité est évidente. Soit k un entier, on suppose que $|z^k| = |z|^k$. Alors, en prenant $z' = z^k$ dans (ii), il vient : $|z^{k+1}| = |z|\,|z^k| = |z|\,|z|^k = |z|^{k+1}$. À présent, si k est strictement inférieur à zéro, on constate que z^k est l'inverse de z^{-k} et on applique (iii). □

On vient de voir que le module se comporte au mieux avec produit et puissances – le module du produit est le produit des modules. Avec la somme, c'est plus compliqué.

Proposition (inégalité triangulaire)**.** *Soient z et z' deux complexes. Alors :*

$$\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z - z'| \leqslant |z| + |z'|\,.$$

Démonstration. Pour prouver l'inégalité $|z - z'| \leqslant |z| + |z'|$, qui fait intervenir deux réels positifs ou nuls, il suffit de prouver que l'on a : $|z - z'|^2 \leqslant \big(|z| + |z'|\big)^2$. Or, on a :

$$|z - z'|^2 = (z - z')\,\overline{z - z'} = |z|^2 - z\overline{z'} - \overline{z}z' + |z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z\overline{z'})$$

et

$$\big(|z| + |z'|\big)^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\,|zz'|\,.$$

L'astuce consiste à introduire $w = z\overline{z'}$ et à remarquer l'égalité : $|zz'| = |z|\,|z'| = |z|\,|\overline{z'}| = |w|$. Il suffit donc de montrer : $-\mathrm{Re}(w) \leqslant |w|$, ce qui est évident :

$$-\mathrm{Re}(w) \leqslant |\mathrm{Re}(w)| = \sqrt{\mathrm{Re}(w)^2} \leqslant \sqrt{\mathrm{Re}(w)^2 + \mathrm{Im}(w)^2}.$$ □

Exercice. Soient z et z' deux complexes non nuls. Montrer que si $|z + z'| = |z| + |z'|$ (resp. $|z + z'| = \big||z| - |z'|\big|$), alors il existe a réel strictement positif (resp. strictement négatif) tel que $z' = az$.

Remarque. Voici une interprétation géométrique à l'inégalité triangulaire : connaissant $r = |z|$ et $r' = |z'|$, que peut-on dire de $z - z'$? La réponse, c'est que $z - z'$ est dans la couronne colorée.

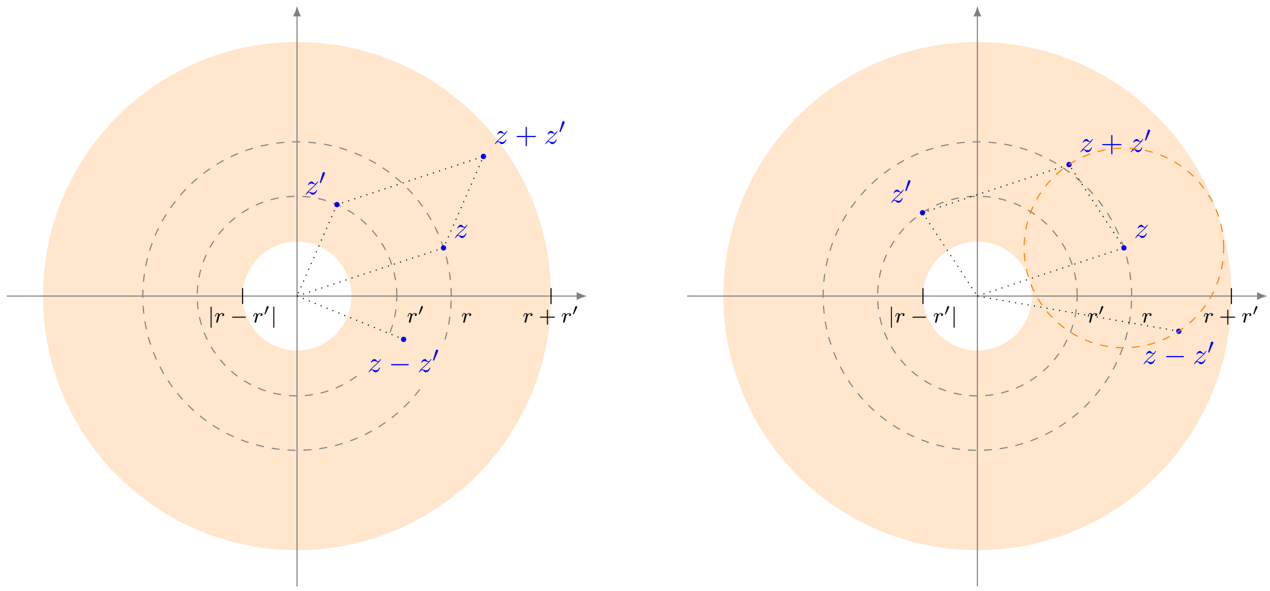

FIGURE 1 – Connaissant $|z|$ et $|z'|$, on sait que $z+z'$ et $z-z'$ sont dans la couronne (en pointillés orange, les points $z+z'$ lorsque z est fixé et $|z'|$ est fixé : la couronne est la réunion de tous ces cercles)

3° Racines carrées et équations de degré 2

a) Racines carrées

Définition. Soit A un nombre complexe. On appelle *racine carrée* de A tout complexe z dont le carré vaut A, c'est-à-dire tel que $z^2 = A$.

Exemple. Soit $A = 0$. Comme un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, l'égalité $z^2 = 0$ équivaut à $z = 0$. Autrement dit, 0 possède une unique racine carrée, qui est 0.

Exemple. Soit $A = a$ un réel strictement positif. Il existe deux réels dont le carré vaut a qui sont l'opposé l'un de l'autre. Celui qui est positif est appelé la racine carrée (réelle) de a, on le note $\sqrt{a}$ (ou $a^{1/2}$). Pourrait-il y avoir d'autres complexes dont le carré vaut a ? Pour tout complexe z, on a :

$$z^2 = a \iff z^2 - a = 0 \iff z^2 - \sqrt{a}^2 = 0 \iff \big(z - \sqrt{a}\big)\big(z + \sqrt{a}\big) = 0.$$

Comme un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, a possède deux racines carrées dans $\mathbb{C}$, qui sont $\sqrt{\alpha}$ et $-\sqrt{\alpha}$. On voit donc que la nouvelle dénomination, qui met $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ sur un pied d'égalité, est une évolution par rapport à celle que l'on connaissait.

Exemple. Soit $A = a$ un réel strictement négatif. Alors $A = -|a|$ et on remarque que $|a| = \sqrt{|a|}^2$ et que $-1 = \mathrm{i}^2$, de sorte que $-|a| = \mathrm{i}^2\sqrt{|a|}^2 = \big(\mathrm{i}\sqrt{|a|}\big)^2$. Pour tout complexe z, on a donc :

$$z^2 = A \iff z^2 - \big(-|a|\big) = 0 \iff z^2 - \Big(\mathrm{i}\sqrt{|a|}\Big)^2 = 0 \iff \Big(z - \mathrm{i}\sqrt{|a|}\Big)\Big(z + \mathrm{i}\sqrt{|a|}\Big) = 0.$$

Un produit est nul etc., donc $a < 0$ admet deux racines carrées complexes : $\mathrm{i}\sqrt{|a|}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{|a|}$.

Venons-en à un exemple plus significatif. Il y a deux idées :

— l'équation $z^2 = A$ se traduit par un système de deux équations à deux inconnues $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$;

— on ajoute à ce système une équation redondante, $|z|^2 = |A|$, ce qui revient à utiliser le lemme évident suivant.

Lemme (méthode à connaître)**.** *Soient z et A deux complexes. Alors :*

$$z^2 = A \iff \begin{cases} z^2 = A \\ |z|^2 = |A|. \end{cases}$$

Démonstration. On procède par double implication. Supposons que $z^2 = A$. On doit montrer que $z^2 = A$ et que $|z|^2 = |A|$. La première égalité est évidente et la deuxième est très facile : $|z|^2 = |z^2| = |A|$, d'où l'implication directe. La réciproque est triviale : si $z^2 = A$ et $|z|^2 = |A|$, on a bien $z^2 = A$... $\square$

Exemple. Soit $A = 5 - 12\mathrm{i}$. On cherche $z = x + y\mathrm{i}$ complexe, avec x et y réels, tel que $z^2 = A$. D'après le lemme, on a :

$$
\begin{aligned}
z^2 = A &\iff \begin{cases} z^2 = A \\ |z|^2 = |A| \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i} = 5 - 12\mathrm{i} \\ x^2 + y^2 = \sqrt{5^2 + (-12)^2} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 & (L_1) \\ 2xy = -12 & (L_2) \\ x^2 + y^2 = 13 & (L_3) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 = \dfrac{5+13}{2} = 9 & \dfrac{1}{2}(L_1 + L_3) \\ y^2 = \dfrac{-5+13}{2} = 4 & \dfrac{1}{2}(-L_1 + L_3) \\ 2xy = -12 & (L_2) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 2 \\ xy = -6 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ xy = -6 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ xy = -6 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \\ xy = -6 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \\ xy = -6. \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -3 \\ y = 2. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Dans la dernière équivalence, le premier et le quatrième cas ne donnent pas de solution puisque $xy > 0$, alors que l'on veut $xy = -6$.

Proposition. *Un nombre complexe A admet exactement une ou deux racines carrées. Plus précisément,*

— *si A est nul, sa seule racine carrée est 0 ;*

— *si A n'est pas nul, il admet deux racines carrées distinctes qui sont opposées l'une de l'autre : si δ est l'une d'entre elles, l'autre est $-\delta$.*

Démonstration. Écrivons $A = a + b\mathrm{i}$, avec a et b réels. On cherche $\delta = x + y\mathrm{i}$ complexe, avec x et y réels, tel que $\delta^2 = A$.
Si $b = 0$ alors $A = a$ est réel : on a vu dans les exemples ci-dessus que a admet deux racines carrées (ou une si $A = 0$) :

— si $a > 0$, les racines carrées complexes de a sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$;

— si $a = 0$, l'unique racine carrées complexes de a est 0 ;

— si $a < 0$, les racines carrées complexes de a sont $\mathrm{i}\sqrt{|a|}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{|a|}$.

On suppose désormais que $b \neq 0$.

On utilise l'astuce contenue dans le lemme ci-dessus (noter que $|A| = \sqrt{a^2+b^2}$) :

$$\delta^2 = A \iff \begin{cases} \delta^2 = A \\ |\delta|^2 = |A| \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i} = a + b\mathrm{i} \\ x^2 + y^2 = |A| \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a & (L_1) \\ 2xy = b & (L_2) \\ x^2 + y^2 = |A| & (L_3) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x^2 = \dfrac{|A| + a}{2} & \dfrac{1}{2}(L_1 + L_3) \\ y^2 = \dfrac{|A| - a}{2} & \dfrac{1}{2}(-L_1 + L_3) \\ 2xy = b & (L_2) \end{cases}$$

On vérifie que $|A| \pm a = \sqrt{a^2+b^2} \pm a$ est strictement positif : en effet, $a^2 < a^2 + b^2$ donc : $\mp a \leqslant |a| \leqslant \sqrt{a^2} < \sqrt{a^2+b^2}$. Ainsi, au signe près, x et y sont respectivement égaux à

$$\alpha = \sqrt{\frac{|A|+a}{2}} \quad \text{et} \quad \beta = \sqrt{\frac{|A|-a}{2}}.$$

Ce sont deux réels strictement positifs. Comme $|A|^2 = a^2 + b^2$, on a

$$\alpha\beta = \sqrt{\frac{\big(|A|+a\big)\big(|A|-a\big)}{4}} = \sqrt{\frac{|A|^2 - a^2}{4}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2-a^2}}{2} = \frac{|b|}{2}.$$

Vu que $b \neq 0$, on écrit $b = \mathrm{sg}(b)\,|b|$ où $\mathrm{sg}(b) = \dfrac{b}{|b|} = \pm 1$ est le signe de b. Il vient :

$$\delta^2 = A \iff \begin{cases} |x| = \alpha \\ |y| = \beta \\ xy = \mathrm{sg}(b)\alpha\beta. \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent quatre solutions pour (x, y), à savoir (α, β), $(\alpha, -\beta)$, $(-\alpha, \beta)$ et $(-\alpha, -\beta)$, parmi lesquelles deux sont à écarter car on veut que x et y soient de même signe si $\mathrm{sg}(b) = +1$ et que x et y soient de signe opposé si $\mathrm{sg}(b) = -1$.
Au bilan, A admet exactement deux racines carrées : $\pm(\alpha + \mathrm{sg}(b)\beta\mathrm{i})$, c'est-à-dire

$$\varepsilon\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + \mathrm{sg}(b)\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\mathrm{i}\right), \quad \varepsilon \in \{-1, 1\}. \qquad \square$$

Mise en garde. *Comme un complexe A admet* deux *racines carrées (s'il n'est pas nul) et qu'il n'y a pas de moyen naturel d'en choisir une (par exemple, la notion de positivité n'a pas de sens sur $\mathbb{C}$), il ne faut pas parler de « la » racine carrée de A et il faut encore moins écrire $\sqrt{A}$ (à moins que A ne soit un réel positif).*

Mise en garde. *Cette formule vaguement ignoble n'est pas à retenir mais il faut savoir calculer les racines carrées en suivant la preuve ou les exemples ci-dessus.*

b) Équations de degré 2

Proposition. *Soient a, b, c trois complexes, a non nul. Il existe un ou deux nombres complexes z tels que $az^2 + bz + c = 0$, c'est ou ce sont :*

$$\frac{-b+\delta}{2a} \ \text{et}\ \frac{-b-\delta}{2a},$$

où δ est l'une des deux racines carrées de $\Delta = b^2 - 4ac$.
(Plus précisément, si Δ est nul, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet une unique solution $-b/(2a)$; si Δ n'est pas nul, elle en admet deux distinctes.)

Mise en garde. *Le premier qui écrit $\sqrt{\Delta}$ dans une situation où Δ est un complexe qui n'est pas un réel positif en reçoit une*[6]*. Les suivants aussi.*

Démonstration. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$. Soit δ une racine carrée de Δ, c'est-à-dire un complexe tel que $\delta^2 = b^2 - 4ac$. On réduit le polynome à sa forme canonique :

$$az^2 + bz + c = a\left[z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\delta^2}{4a^2}\right].$$

Cette dernière expression se factorise $\big(A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)\big)$:

$$az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\right),$$

et l'on conclut en arguant qu'un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. □

c) Équations polynomiales générales

On admet le théorème suivant[7].

Théorème (D'Alembert-Gauss). *Soient n un entier naturel non nul et $a_0, \ldots, a_n$ des complexes, a_n non nul. Il existe un complexe z tel que*

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0.$$

Autrement dit, toute équation polynomiale non triviale possède une solution. On verra au S2 qu'elle en possède en fait n si on les compte convenablement.

4° Deux formules utiles

Les deux formules suivantes servent en permanence. Il faut les connaître dans un sens et dans l'autre – savoir factoriser une somme en produit et développer un produit en somme.

a) Différence de puissances

Proposition. *Soient n un entier naturel non nul et a, b deux complexes. Alors :*

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}.$$

Exemples. — Pour $n = 2$, on retrouve le fameux : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
- Pour $n = 3$, il *faut* connaître : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.
- En remplaçant b par $-b$, on trouve : $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.
- Si $a \neq 1$ et $b = 1$, on peut écrire : $\dfrac{a^n - 1}{a - 1} = a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1$.

Démonstration. On développe le membre de droite, on fait un changement d'indice ($\ell = k+1$) puis on simplifie presque tout :

$$\begin{aligned}(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k n^{n-k+1} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} a^{\ell} b^{n-\ell+1} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k n^{n-k+1} \\ &= a^n - b^n,\end{aligned}$$

puisque tous les termes des deux sommes sont égaux, sauf le dernier de la première somme ($\ell = n$) et le premier de la deuxième somme ($k = 0$). □

6. Réprimande ou admonestation, voire engueulade.

7. Il est appelé théorème de D'Alembert en France, théorème de Gauss en Allemagne, théorème fondamental de l'algèbre dans le monde anglo-saxon. À dire vrai, la preuve proposée par D'Alembert était fausse mais la première preuve pourrait être celle de Lagrange, quelques semaines avant Gauss...

b) Rappels sur les coefficients binômiaux

Définition. Soient n et k deux entiers. On définit :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple. Les coefficients correspondant aux petites valeurs de n et k sont à connaître par cœur :

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	**6**	**4**	1	
5	1	5	10	**10**	5	1

Lemme. *Soient n et k deux entiers avec $n \geqslant 1$. Alors :* $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

Démonstration. Soit n un entier, $n \geqslant 1$. La formule est évidente si $k < 0$ ou si $k > n$, les trois coefficients binomiaux sont nuls. Si $k = 0$, l'égalité à prouver se réduit à $1 = 1 + 0$; si $k = n$, à $1 = 0 + 1$. On suppose désormais que $1 \leqslant k \leqslant n-1$ et on calcule :

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-k)\times(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{k\times(n-1)!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-k+k)\times(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

□

c) Formule du binôme de Newton

Proposition. *Soient n un entier naturel et a, b deux complexes. Alors :*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration. On procède par récurrence. Pour $n = 0$, les deux membres valent 1 de façon conventionnelle. Pour $n = 1$, la formule est évidente : $a + b = a + b$. Soit n un entier, on suppose connaître le développement de $(a+b)^{n-1}$. On calcule :

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= (a+b)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} a^k b^{n-k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} a^{k+1} b^{n-k-1} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n}\binom{n-1}{\ell-1} a^{\ell} b^{n-\ell} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} a^k b^{n-k} \qquad (\ell = k+1) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right] a^k b^{n-k}
\end{aligned}$$

où, pour regrouper les deux sommes, on utilise l'annulation de $\binom{n-1}{\ell-1}$ pour $\ell = 0$ et de $\binom{n-1}{k}$ pour $k = n$. □

Exemple. Pour $a = 1$ et $b = x$, on trouve : $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = (1+x)^n$.
En particulier, pour $x = \pm 1$: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$ et $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = 0$.

IV Arguments

1° Fonctions trigonométriques

a) On admet ici l'existence et les propriétés des fonctions cosinus et sinus, qui sont démontrées ailleurs. Rappelons-les. Les fonctions cosinus et sinus sont deux fois dérivables et l'on a [8] :

$$\begin{cases}\cos' = -\sin \\ \sin' = \cos,\end{cases} \qquad \cos'' + \cos = 0, \quad \sin'' + \sin = 0, \qquad \begin{cases}\cos(0) = 1 \\ \sin(0) = 0.\end{cases}$$

On a les formules d'addition :

$$\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases}\cos(\theta + \theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \\ \sin(\theta + \theta') = \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'.\end{cases}$$

Il existe un réel π strictement positif tel que le cosinus est strictement positif sur $[0, \pi/2[$ et $\cos(\pi/2) = 0$. La fonction cosinus est paire, alors que la fonction sinus est impaire. Toutes deux sont périodiques et leur plus petite période positive est 2π. Voici les tableaux de variations de cos et sin sur $[-\pi, \pi]$.

x	$-\pi$		$\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
cos	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1
sin	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0

b) On doit résoudre un système bien particulier.

Proposition. *Soient a, b deux réels tels que $a^2 + b^2 = 1$. Il existe un unique $\theta \in \,]-\pi, \pi]$ tel que*

$$\begin{cases}\cos\theta = a \\ \sin\theta = b.\end{cases}$$

Démonstration. Remarquons que l'égalité $a^2 + b^2 = 1$ donne : $0 \leqslant a^2 = 1 - b^2 \leqslant 1$. Par suite, $|a| \leqslant 1$; autrement dit : $a \in [-1, 1]$. D'après son tableau de variations, le cosinus est continu et strictement décroissant sur sur $[0, \pi]$ (resp. $[-\pi, 0]$). Par le théorème des valeurs intermédiaires, elle établit une bijection de $[0, \pi]$ (resp. $[-\pi, 0]$) sur $[-1, 1]$. Il existe donc un unique $\theta_0 \in [0, \pi]$ tel que $\cos\theta_0 = a$ (resp. un unique $\theta_1 \in [-\pi, 0]$ tel que $\cos\theta_1 = a$ et c'est : $\theta_1 = -\theta_0$).
On a : $|b| = \sqrt{1 - a^2} = \sqrt{1 - \cos^2\theta_0} = |\sin\theta_0|$. Comme $\theta_0 \in [0, \pi]$, on a par les variations du sinus : $|\sin\theta_0| = \sin\theta_0$. Si $b \geqslant 0$, on a donc : $b = \sin\theta_0$. Sinon, on a : $b = -|b| = \sin(-\theta_0)$. Cela établit l'existence de θ : on prend $\theta = \theta_0$ si $b \geqslant 0$, $\theta = \theta_1 = -\theta_0$ si $b < 0$.
Pour montrer l'unicité, supposons que $\theta \in \,]-\pi, \pi]$ convienne. Si $b < 0$, alors $\sin\theta < 0$ et donc, par les variations de sinus, on a : $\theta \in \,]-\pi, 0[$. Comme $\cos\theta = \cos\theta_1$ et que le cosinus est injectif sur $[-\pi, 0]$, il vient : $\theta = \theta_1$. Si $b \geqslant 0$, alors $\theta \in [0, \pi]$ et, par injectivité du cosinus sur cet intervalle, il vient de même : $\theta = \theta_0$. □

2° Nombres complexes de module 1

a) Définition des arguments

Définition. Soit z un nombre complexe de module 1. On a donc : $\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 = 1$. On appelle *argument principal* de z et on note $\arg(z)$ le réel $\theta \in \,]-\pi, \pi]$ tel que

$$\begin{cases}\cos\theta = \mathrm{Re}(z) \\ \sin\theta = \mathrm{Im}(z),\end{cases} \tag{A}$$

dont l'existence et l'unicité sont assurés par la proposition précédente.
Plus généralement, on appelle *argument* de z tout réel θ qui est solution du système (A).

8. Le système ou une des équations, avec les valeurs en zéro, permettent de tout reconstruire.

Proposition. *Soit z un nombre complexe de module 1. Alors z possède une infinité d'arguments. Si θ_1 est l'un d'entre eux, par exemple l'argument principal, les arguments de z sont les éléments de l'ensemble :*

$$\mathrm{Arg}(z) = \{\theta_1 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Démonstration. Soit θ un argument de z. Montrons qu'il existe un unique $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que l'on ait : $-\pi < \theta + 2\ell\pi \leqslant \pi$. En effet, cette condition est équivalente à (vérifier !)

$$\ell \leqslant \frac{-\theta + \pi}{2\pi} < \ell + 1,$$

c'est-à-dire que ℓ est la partie entière de $(-\theta + \pi)/(2\pi)$. Par périodicité, on a :

$$\begin{cases} \cos(\theta + 2\ell\pi) = \cos\theta = \mathrm{Re}\, z \\ \sin(\theta + 2\ell\pi) = \sin\theta = \mathrm{Im}\, z, \end{cases}$$

de sorte que $\theta + 2\ell\pi$ est l'unique solution de ce système qui appartient à $]-\pi, \pi]$. On a donc : $\theta + 2\ell\pi = \arg(z)$.
Si on applique ce raisonnement au θ_1 de l'énoncé, on trouve m entier tel que $\theta_1 + 2m\pi = \arg(z)$. On a donc : $\theta = \theta_1 + 2k\pi$ pour $k = m - \ell$.
Inversement, la périodicité du cosinus et du sinus assure que si θ_1 est un argument de z, alors $\theta_1 + 2k\pi$ en est un aussi pour tout entier k. □

b) Exponentielle complexe

Notation. On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Définition. On appelle *exponentielle complexe* l'application $\mathbf{e} : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$, $\theta \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où, pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \sin(\theta)\mathrm{i}.$$

La proposition suivante est une reformulation de ce qui précède en termes d'exponentielle.

Proposition. (i) *Pour tout nombre complexe z de module 1, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.*
(ii) *Pour tous θ et θ' réels, on a : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \theta' + 2k\pi$.*

Remarque. La proposition entraîne que l'exponentielle complexe est surjective mais pas injective.

Démonstration. (i) Soit $z \in \mathbb{U}$ et soit θ un argument de z. On a par définition : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = z$.
(ii) Si $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$, alors θ et θ' sont deux arguments de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, donc ils diffèrent d'un multiple de 2π par la proposition précédente. □

Le résultat suivant est particulièrement utile et important.

Théorème. *Pour tous θ et θ' réels, on a :*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}.$$

Démonstration. C'est une façon d'écrire les formules d'addition du cosinus et du sinus :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} &= \cos(\theta + \theta') + \sin(\theta + \theta')\mathrm{i} \\ &= \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + (\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta')\mathrm{i} \\ &= (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta') \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}. \end{aligned}$$

□

Corollaire. *Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On a :*
(i) $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^{-1} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ *;*
(ii) $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^{n} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$.

Démonstration. (i) On a par im-parité :

$$\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \overline{\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta} = \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta = \cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}.$$

D'autre part, on a : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta)} = \mathrm{e}^{0i} = 1$ donc $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ est l'inverse de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
(ii) On procède comme pour montrer que $|z^n| = |z|^n$ pour $z \neq 0$. Laissé en exercice. □

c) Lignes trigonométriques remarquables

On a déjà vu les résultats suivants :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2} = i, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi = -1, \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2} = \cos\frac{\pi}{2} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2} = -\mathrm{i}.$$

Lemme (formules de duplication)**.** *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors :*

$$\begin{cases} \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta \\ \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta. \end{cases}$$

Démonstration. On le tire de :

$$\cos 2\theta + \mathrm{i}\sin 2\theta = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + i2\sin\theta\cos\theta,$$

puis on remplace $\cos^2\theta$ par $1 - \sin^2\theta$ ou l'inverse. Bien sûr, on aurait pu appliquer directement les formules d'addition... □

Exemple. Retrouvons les lignes trigonométriques de $\pi/4$. On a : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\right)^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i}$. Soit $c = \cos(\pi/4)$: c'est un réel positif car $\pi/4$ est compris entre 0 et $\pi/2$. On a : $2c^2 - 1 = 0$ donc $c = \sqrt{2}/2$. Quant à $s = \sin\pi/4$, il est aussi positif et on a : $1 - 2s^2 = 0$ donc $s = c$. On aurait pu aussi chercher les racines carrées de i sous forme algébrique. Au bilan :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}.$$

Exercice. (i) Trouver les parties réelle et imaginaire de $j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi/3}$. On pourra remarquer que $j^3 = 1$ et factoriser $j^3 - 1 = j^3 - 1^3$.

(ii) Trouver les parties réelle et imaginaire de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$. On pourra remarquer que l'on a $\pi/3 = -\pi + 4\pi/3$ et $\pi/6 = \pi/2 - \pi/3$ et utiliser les formules d'addition.

(iii) Trouver les parties réelle et imaginaire de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/12}$. On pourra utiliser : $\pi/12 = \pi/3 - \pi/4$.

d) Formules de Moivre, linéarisation

Rapprochons les formules $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ et $\mathrm{Re}(z) = (z + \overline{z})/2$, $\mathrm{Im}(z) = (z - \overline{z})/(2\mathrm{i})$. Il vient :

$$\forall\theta \in \mathbb{R}, \quad \cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}.$$

C'est utile pour « linéariser » des expressions polynomiales en cosinus et sinus. Par exemple :

$$\cos^3\theta = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\right)^3 = \frac{\mathrm{e}^{3i\theta} + \mathrm{e}^{-3i\theta} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{8} = \frac{\cos 3\theta + 3\cos\theta}{4},$$

$$\sin^3\theta = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}\right)^3 = -\frac{\mathrm{e}^{3i\theta} - \mathrm{e}^{-3i\theta} - 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{8i} = -\frac{\sin 3\theta - 3\sin\theta}{4},$$

Ce type de transformation permet de trouver des primitives de polynômes trigonométriques. On peut faire l'inverse également. Exprimons par exemple $\cos 3\theta$ et $\sin 3\theta$ comme des polynômes en $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

$$\begin{aligned} \cos 3\theta + \mathrm{i}\sin 3\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\theta} &= \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^3 = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^3 \\ &= \cos^3\theta + 3\mathrm{i}\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - \mathrm{i}\sin^3\theta \\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta + \mathrm{i}(3\sin\theta - 4\sin^3\theta), \end{aligned}$$

où on passe à la dernière ligne grâce à $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

3° Arguments d'un complexe non nul

a) Passer d'un complexe de module 1 à un complexe non nul repose sur un fait très simple.

Lemme. *Soit z un complexe non nul. Alors, $\dfrac{z}{|z|}$ est de module* 1.

Démonstration. On a : $\left|\dfrac{z}{|z|}\right| = \dfrac{|z|}{\big||z|\big|} = \dfrac{|z|}{|z|} = 1$. □

Définition. Soit z un complexe non nul. On appelle *argument* de z tout argument de $z/|z|$. On appelle *argument principal* de z l'argument principal de $z/|z|$.
Autrement dit, un argument de z est n'importe quel réel θ tel que $z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, l'argument principal est l'unique $\theta \in \left]-\pi, \pi\right]$ tel que $z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

Mise en garde. *Comme Chuck Norris ne sait pas diviser par zéro, il ne sait pas calculer $z/|z|$ et ne peut donc pas trouver un argument pour* 0.

On reformule ce que l'on a déjà dit.

Lemme. *Soit z un complexe non nul et soit θ un argument de z. Les arguments de z sont les réels de la forme $\theta + 2k\pi$ pour k entier quelconque.*

Exemple. Soit z un complexe. On a les équivalences :
- le complexe z est réel strictement positif SSI l'argument de z vaut 0 à 2π près ;
- le complexe z est réel strictement négatif SSI l'argument de z vaut π à 2π près ;
- le complexe z est réel non nul SSI l'argument de z vaut 0 à π près ;
- le complexe z est imaginaire pur non nul SSI l'argument de z vaut $\pi/2$ à π près.

Proposition. *Soient z et z' deux complexes non nuls. Alors :*
$$\exists k \in \mathbb{Z}, \quad \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi.$$

Mise en garde. *La précision « à 2π près » est indispensable. Prenons en effet $z = z' = -\mathrm{i}$. On a :* $\arg(z) = -\frac{\pi}{2} = \arg(z')$ *alors que* $zz' = -1$ *et* $\arg(zz') = \pi \neq -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$.

b) Représentation géométrique

Une *représentation géométrique* d'un complexe z est un couple $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ tel que
$$z = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

On n'a guère le choix sur ρ et θ. En effet, ρ est nécessairement le module de z car : $|z| = |\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| = |\rho|\,|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| = \rho$. Conséquemment, si z n'est pas nul, θ est nécessairement un argument de z puisque $z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

Lemme (Critère d'égalité pour deux formes géométriques)**.** *Soient ρ et ρ' deux réels strictement positifs et θ et θ' deux réels. Alors :*
$$\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \rho'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} \iff \begin{cases} \rho = \rho' \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \theta' + 2k\pi. \end{cases}$$

Mise en garde. *Bien sûr, si $\rho = 0$, alors $\rho' = 0$ et on n'a plus aucune information sur θ et θ'.*

Démonstration. On l'a déjà fait : si on pose $z = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \rho'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$, c'est un nombre complexe non nul et on a vu précédemment que nécessairement, on a : $\rho = |z| = \rho'$ et θ et θ' sont deux arguments de z, qui diffèrent donc d'un multiple de 2π. Réciproquement, si ces conditions sont remplies, la périodicité de sinus et cosinus assure que $\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \rho'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$. □

Exemple. Soit α un réel, on cherche une représentation géométrique de $z = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$. L'astuce consiste à factoriser l'arc moitié $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}$:
$$1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\big) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2} 2\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Ainsi, si $\cos\frac{\alpha}{2} > 0$, on a : $|1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}| = 2\cos\frac{\alpha}{2}$ et $\alpha/2$ est un argument de $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$; si $\cos\frac{\alpha}{2} < 0$, on a : $|1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}| = -2\cos\frac{\alpha}{2}$ et $\alpha/2 + \pi$ est un argument de $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$.
Exercice. Avec la même idée de factoriser l'arc moitié, traiter $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

V Racines

1° Racines carrées, version géométrique

Proposition. *Soit A un complexe non nul. On l'écrit sous forme géométrique : $A = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ où $r = |A|$ et α est un argument de A. Alors, les deux racines carrées de A sont : $\sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}$ et $-\sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}$.*

Démonstration. On vérifie immédiatement : $\left(\sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\right)^2 = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = A$. Soit z un complexe, on a :

$$z^2 = A \iff z^2 - \left(\sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\right)^2 = 0 \iff \left(z - \sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\right)\left(z + \sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\right) = 0,$$

ce qui permet de conclure. □

2° Racines de l'unité

Définition. Soit n un entier naturel. On appelle *racine n-ième de l'unité* tout complexe z tel que $z^n = 1$. On note μ_n l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Proposition. *Soit n un entier naturel non nul. L'ensemble μ_n possède n éléments :*

$$\mu_n = \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n},\ k \in \{0, \dots, n-1\}\right\}.$$

Remarque. Un intérêt des racines de l'unité, c'est d'étudier la géométrie d'un polygone régulier en faisant des calculs dans $\mathbb{C}$.

Démonstration. Soit z un élément de μ_n. Soient ρ réel positif et θ réel tels que $z = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. La condition $z^n = 1$ s'écrit : $\rho^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = 1$. Elle équivaut à : $\rho^n = 1$ et $n\theta = k2\pi$ pour k entier convenable. Comme n est supérieur ou égal à 1, l'application $\rho \mapsto \rho^n$ est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$. La condition $\rho^n = 1$ équivaut donc à $\rho = 1$. Ainsi, les éléments de μ_n sont les complexes de la forme $\zeta_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n}$ avec k entier quelconque.
Il faut remarquer que si k et k' diffèrent d'un multiple de n, disons $k = k' + n\ell$ avec $\ell \in \mathbb{Z}$, alors : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2k'\pi/n + i\ell 2\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2k'\pi/n}$. Par suite, $\zeta_k = \zeta_r$, où $r \in \{0, \dots, n-1\}$ est le reste de la division euclidienne[9] de k par n. Or, pour r et r' distincts dans $\{0, \dots, n-1\}$, il n'existe pas d'entier ℓ tel que $i2r\pi/n = i2r'\pi/n + 2\ell\pi/n$ (sinon, on aurait $0 < |r - r'| \leqslant \frac{\ell}{n} < 1$, absurbe). Ainsi, les éléments de μ_n sont les n éléments ζ_r, $r \in \{0, \dots, n-1\}$. □

Remarque. Si on note $\zeta_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n}$, alors on a : $\zeta_k = \zeta_1^k$. Ainsi, μ_n est l'ensemble des n puissances distinctes de ζ_1.

Corollaire. *Soit n un entier naturel, $n \geqslant 2$. On a :* $\displaystyle\sum_{\zeta \in \mu_n} \zeta = \sum_{k=0}^{n-1} \zeta_k = 0.$

Démonstration. On a en effet, comme $\zeta_1 \neq 1$ et $\zeta_1^n = 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \zeta_k = \sum_{k=0}^{n-1} \zeta_1^k = \frac{1 - \zeta_1^n}{1 - \zeta} = 0.$$ □

3° Racines d'un complexe quelconque

Définition. Soit n un entier naturel et A un complexe. On appelle *racine n-ième de A* tout complexe z tel que $z^n = A$.

Proposition. *Soit n un entier naturel non nul et A un complexe non nul, disons $A = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ avec $r \in \mathbb{R}^+$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. L'ensemble des racines n-ièmes de A contient n éléments :*

$$\left\{r^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha}{n} + i\frac{2k\pi}{n}},\ k \in \{0, \dots, n-1\}\right\} = \left\{r^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha}{n}}\zeta_k,\ k \in \{0, \dots, n-1\}\right\}.$$

Démonstration. Soit $z_0 = r^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha}{n}}$. On a facilement : $z_0^n = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = A$. Mais alors, comme A n'est pas nul, z_0 non plus et on a, pour tout complexe z :

$$z^n = A \iff z^n = z_0^n \iff \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \iff \frac{z}{z_0} \in \mu_n \iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\},\ \frac{z}{z_0} = \zeta_k.$$ □

9. Rappelons que pour tout couple (k, n) d'entiers, avec $n \neq 0$, il existe un unique couple « quotient-reste » (q, r) tel que $k = qn + r$ et $0 \leqslant r < |n|$. Si $n > 0$, q est la partie entière de k/n et $r = k - n\lfloor \frac{k}{n} \rfloor$.