**Université Claude Bernard - Lyon 1** — Semestre de printemps 2023-2024

Cursus préparatoire — Algèbre 2 — 14 février 2024

---

**Devoir Surveillé n°1**
**Durée : 1 h 30**

---

*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez prises.*

**Exercice 1.** Transformer la matrice

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 5 & -10 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

en une matrice échelonnée réduite en lignes, puis expliciter une base du noyau de cette matrice.

**Exercice 2.** Pour $m \in \mathbb{R}$, on pose

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & m \end{pmatrix}$$

1. Dans cette question, on considère le cas où $m = 1$.
   (a) Vérifier que $B^2 = 2B + 3I$.
   (b) En déduire que $B$ est inversible et calculer son inverse.
2. Cas général où $m$ est un réel quelconque.
   (a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $m$ pour que $B$ soit inversible.
   (b) Dans le cas où $B$ n'est pas inversible, calculer l'image de $B$.

**Exercice 3.** On fixe un réel $\theta$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 2\cos\theta & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 1 \end{pmatrix}$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$X_n = A^n X_0.$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, expliciter une relation de récurrence entre $x_{n+1}, y_{n+1}$ et $x_n, y_n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\cos((n+1)\theta + \cos((n-1)\theta)$ en fonction de $\cos(n\theta)$ et $\cos(\theta)$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \begin{pmatrix} \cos((n+1)\theta) \\ \cos(n\theta) \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4.** On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\sqrt{\cosh(2x) - 1}}{e^x + x^2}.$$

1. Déterminer les limites de $f$ en $+\infty$ et $-\infty$.
2. En utilisant le développement limité de $x \mapsto \cosh(2x)$ à l'ordre 2 en 0, donner un équivalent simple de $f$ en 0.

**Exercice 5.** On considère la fonction

$$g : ]-1, 0[ \cup ]0, +\infty[ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x^2}.$$

1. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \ln(1+x) - \sin x$.
2. Montrer que la fonction $g$ peut être prolongée par continuité en 0.
3. Cette fonction est-elle alors dérivable en 0 ?

# Correction

**Solution 1.** a) On échelonne la matrice pour avoir une matrice échelonnée réduite

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 5 & -10 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*Commentaires* : Il y a eu beaucoup d'erreurs dans les calculs, il faut prendre son temps et être précis à chaque étape.

b) On note $A$ la matrice de l'exercice et $A'$ la matrice échelonnée réduite. Pour $X = (x, y, z, t)^t$ on a $X \in \ker(A)$ ssi

$$A'X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z + 2t & = 0 \\ z + 3t & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = 2y + t \\ z & = -3t \end{cases}$$

Conclusion

$$\begin{aligned} \ker(A) &= \{(2y + t, y, -3t, t),\ y, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}\{(2, 1, 0, 0), (1, 0, -3, 1)\} \end{aligned}$$

donc $(2, 1, 0, 0), (1, 0, -3, 1)$ est une base de $\ker(A)$.

*Commentaires* : On demandait une base donc résoudre le système ne suffisait pas. Il fallait écrire le noyau sous la forme $\ker(A) = \mathrm{Vect}\{...\}$.

**Solution 2.** 1-(a) On a pour $m = 1$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 9 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad 2B + 3I = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 9 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

D'où l'égalité.

*Commentaires* : Question faite correctement par tous les élèves ou presque.

1-(b) On en déduit que

$$B^2 - 2B = 3I$$

et donc

$$B(\frac{1}{3}B - \frac{2}{3}I) = I \quad \text{et} \quad (\frac{1}{3}B - \frac{2}{3}I)B = I.$$

On a alors que $B$ est inversible et

$$B^{-1} = \frac{1}{3}B - \frac{2}{3}I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

*Commentaires* : Il était également possible de calculer l'inverse de la matrice à la main. Attention alors aux fautes de calculs.

2-(a) On échelonne la matrice en ligne.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & m \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & m-4 \end{pmatrix}$$

Pour que la matrice soit inversible il faut $m - 4 \neq 0$ car sinon on obtient une ligne de 0. Supposons maintenant $m - 4 \neq 0$ alors on peut continuer les calculs

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow \frac{1}{m-4}L_3]{L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui montre que la matrice est inversible. Conclusion l'unique condition est $m \neq 4$.

*Commentaires* : Ici il n'était pas nécessaire de calculer explicitement la matrice inverse. La question a été assez moyennement réussie.

2-(b) Dans le cas $m = 4$ on a échelonne la matrice en colonne

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$Im(B) = \text{Vec}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

*Commentaires* : Seul le cas $m = 4$ était demandé ici. Si la matrice est inversible on a toujours $Im(B) = \mathbb{R}^3$ (l'ensemble total).

**Solution 3.** 1- On a

$$X_{n+1} = A(A^n X_0) = AX_n = \begin{pmatrix} 2\cos\theta & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\theta x_n - y_n \\ x_n \end{pmatrix}$$

Et donc

$$\begin{cases} x_{n+1} & = 2\cos\theta x_n - y_n \\ y_{n+1} & = x_n \end{cases}$$

*Commentaires* : La question a été surprenament assez mal réussie.

2- (Méthode 1) On utilise les formules de trigonométrie

$$\cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin((\theta)$$
$$\cos((n-1)\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) + \sin(n\theta)\sin((\theta)$$

et donc

$$\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(n\theta)\cos(\theta).$$

(Méthode 2) On utilise que $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et alors

$$\begin{aligned} \cos(\theta)\cos(n\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)\left(\frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}\right) \\ &= \frac{e^{i(n+1)\theta}+e^{i(n-1)\theta}+e^{i(-n+1)\theta}+e^{i(-n-1)\theta}}{4} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(n+1)\theta}+e^{-i(n+1)\theta}}{2}+\frac{e^{i(n-1)\theta}+e^{-i(n-1)\theta}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(\cos((n+1)\theta)+\cos((n-1)\theta)) \end{aligned}$$

Donc

$$\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta)$$

*Commentaires* : Il faut connaitre ses formules de trigo.

3- On raisonne par récurrence : Initialisation on a bien $x_0 = \cos(\theta)$ et $y_0 = \cos(0) = 1$. On suppose maintenant que l'hypothèse de récurrence est vraie au temps $(n-1)$

$$\begin{cases} x_{n-1} & = \cos(n\theta) \\ y_{n-1} & = \cos((n-1)\theta) \end{cases}$$

On calcul alors $x_n$ et $y_n$ :

$$\begin{cases} x_n & = 2\cos\theta\cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta) \\ y_n & = \cos(n\theta) \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} x_n & = \cos((n+1)\theta) \\ y_n & = \cos(n\theta) \end{cases}$$

où on a utilisé la question précédente et ce qui termine la preuve de la récurrence.

*Commentaires* : Peu d'élèves ont réussi à terminer l'exercice.

**Solution 4.**

1- On a

$$\sqrt{\cosh(2x)-1} = \sqrt{\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{2}} = \frac{e^x}{\sqrt{2}}\sqrt{(1-2e^{-2x}+e^{-4x})}$$

Donc

$$\frac{\sqrt{\cosh(2x)-1}}{e^x+x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{e^x\sqrt{(1-2e^{-2x}+e^{-4x})}}{e^x(1+x^2e^{-x})} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{(1-2e^{-2x}+e^{-4x})}}{1+x^2e^{-x}}$$

Par croissance comparée $x^2e^{-x} \to 0$ lorsque $x \to +\infty$ et $\sqrt{(1-2e^{-2x}+e^{-4x})} \to 1$ et on a alors

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\cosh(2x)-1}}{e^x+x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

De même

$$\frac{\sqrt{\cosh(2x)-1}}{e^x+x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{e^{-x}\sqrt{(1-2e^{2x}+e^{4x})}}{x^2(1+x^{-2}e^x)}$$

Par croissance comparée

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x^2} = \lim_{u\to\infty}\frac{e^u}{u^2} = \infty$$

et $e^{2x}, e^{4x}$ et $x^{-2}e^x \to 0$ lorsque $x \to -\infty$. Finalement on obtient

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{\cosh(2x)-1}}{e^x+x^2} = \infty$$

*Commentaires* : Beaucoup d'élèves ont essayé à tord de faire un DL. Attention les DL ne peuvent étre utilisés que lorsque les termes convergent vers 0.

2- On fait le DL pour $x \to 0$

$$\cosh(2x) = 1 + \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2) = 1 + 2x^2 + o(x^2).$$

Donc

$$\sqrt{\cosh(2x)-1} = \sqrt{2x^2+o(x^2)} = \sqrt{2}|x|\sqrt{1+o(1)}$$

et on a alors

$$\sqrt{\cosh(2x)-1} \sim \sqrt{2}|x|.$$

De plus $\lim_{x\to0} e^x + x^2 = 1$ et on en déduit que

$$\frac{\sqrt{\cosh(2x)-1}}{e^x+x^2} \sim_{x\to0} \frac{\sqrt{2}|x|}{1} = \sqrt{2}|x|$$

*Commentaires* : Attention à $\sqrt{x^2} = |x|$ et non $x$.

**Solution 5.** 1- On utilise les formules usuelles pour ln et sin

$$\begin{aligned}\ln(1+x) - \sin(x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3).\end{aligned}$$

*Commentaires* : Globalement bien réussie mais avec tout de même pas mal d'erreur de calculs.

2- On a alors
$$g(x) = \frac{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} + o(x)$$
et on obtient que $\lim_{x\to 0} g(x) = -\frac{1}{2}$. La limite existe donc la fonction peut être prolongée par continuité avec $g(0) = -\frac{1}{2}$.

*Commentaires* : Globalement la question a été bien réussie.

3- (Méthode 1) La fonction admet un developpement limité à l'ordre 1 en 0, donc elle est dérivable et $g'(0) = \frac{1}{2}$ (voir cours).

(Méthode 2) On calcule

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{x}{2} + o(x) + \frac{1}{2}}{x} = \frac{1}{2} + o(1)$$

et donc $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \frac{1}{2}$, la fonction $g$ est donc bien dérivable en 0 et $g'(0) = \frac{1}{2}$.

*Commentaires* : Attention la formule de Taylor Young ne permet pas de démontrer que la fonction est dérivable mais seulement que si elle l'était on aurait un DL. Remarquer aussi que «DL $\Rightarrow$ dérivable» est vrai uniquement à l'ordre 1. L'affirmation «DL à l'ordre 2 $\Rightarrow$ 2 fois dérivable ($g''(0)$ existe)» est fausse.