Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2023-2024

Cursus préparatoire — Algèbre 2 — 14 février 2024

Devoir Surveillé n°1

Durée : 1 h 30

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez prises.

Exercice 1 *Transformer la matrice*

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 5 & -10 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

en une matrice échelonnée réduite en lignes, puis expliciter une base du noyau de cette matrice.

Exercice 2 *Pour $m \in \mathbb{R}$, on pose*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & m \end{pmatrix}$$

1. *Dans cette question, on considère le cas où $m = 1$.*
   (a) *Vérifier que $B^2 = 2B + 3I$.*
   (b) *En déduire que B est inversible et calculer son inverse.*
2. *Cas général où m est un réel quelconque.*
   (a) *Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur m pour que B soit inversible.*
   (b) *Dans le cas où B n'est pas inversible, calculer l'image de B.*

Exercice 3 *On fixe un réel θ. On pose*

$$A = \begin{pmatrix} 2\cos\theta & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 1 \end{pmatrix}$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$X_n = A^n X_0.$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

1. *Pour $n \in \mathbb{N}$, expliciter une relation de récurrence entre x_{n+1}, y_{n+1} et x_n, y_n.*
2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\cos((n+1)\theta + \cos((n-1)\theta)$ en fonction de $\cos(n\theta)$ et $\cos(\theta)$.*
3. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
$$X_n = \begin{pmatrix} \cos((n+1)\theta) \\ \cos(n\theta) \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 *On considère la fonction*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\sqrt{\cosh(2x) - 1}}{e^x + x^2}.$$

1. *Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.*
2. *En utilisant le développement limité de $x \mapsto \cosh(2x)$ à l'ordre 2 en 0, donner un équivalent simple de f en 0.*

Exercice 5 *On considère la fonction*

$$g :]-1, 0[\cup]0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x^2}.$$

1. *Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \ln(1+x) - \sin x$.*
2. *Montrer que la fonction g peut être prolongée par continuité en 0.*
3. *Cette fonction est-elle alors dérivable en 0 ?*